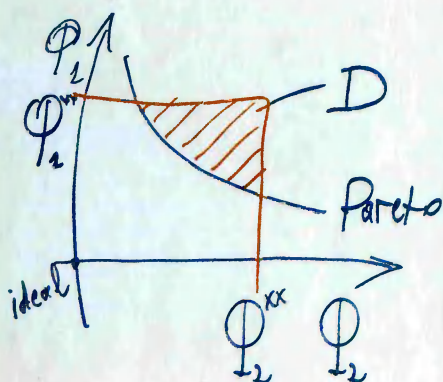


Высшее образование

И. М. Соболев
Р. Б. Статников

Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями



дрофа

**И. М. Соболев
Р. Б. Статников**

**Выбор
оптимальных
параметров
в задачах
со многими
критериями**

Издание второе, переработанное и дополненное

Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
«Технические науки»

 ДРОФА

МОСКВА
2006

Рецензенты:

проф., д-р техн. наук *С. В. Бахмутов* (проректор МГТУ «МАМИ» по научн. работе);
проф., д-р физ.-мат. наук *Ю. С. Кан* (профессор кафедры теории вероятностей МАИ);
проф., д-р физ.-мат. наук *А. И. Кибзун* (зав. кафедрой теории вероятностей МАИ)

Соболь, И. М.

С54 **Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями:**
учеб. пособие для вузов / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. — 2-е изд.,
перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2006. — 175, [1] с.: ил.

ISBN 5-7107-7989-X

Книга посвящена разработанному авторами методу исследования пространства параметров для постановки и решения прикладных задач оптимизации со многими критериями качества. В основе метода лежат построение допустимого и Парето-оптимального множеств решений. В дополнение к 1-му (1981 г.) изданию во 2-м рассматриваются новые результаты по теории метода. Рассматриваются три практически важных класса многокритериальных задач: проектирование, идентификация, проектирование с управлением. Приводятся многочисленные реальные примеры.

Для широкого круга специалистов, научных работников, преподавателей, студентов, специалистов, имеющих дело с прикладными задачами оптимизации.

УДК 519.6
ББК 22.19

Учебное издание

Соболь Илья Меерович
Статников Роман Бенционович

**ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ
СО МНОГИМИ КРИТЕРИЯМИ**

Учебное пособие для вузов

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*. Редактор *Е. А. Вольмир*

Художественное оформление *Ю. В. Христин*

Технический редактор *И. В. Грибкова*

Компьютерная верстка *Т. В. Рыбина*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 12.04.06. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская.

Гарнитура Newton. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 3418.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сушевский Вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обратиться по адресу:
127018, Москва, Сушевский Вал, 49. Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»: 127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.

Тел.: (495) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин, ул. Октябрьской революции, 366/2.

Тел.: (495) 741-59-76.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Тульская типография». 300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

Издательство «Дрофа» предложило переиздать книгу, опубликованную еще в 1981 г. Без малого 30 лет применяется наш метод исследования пространства параметров (метод ИПП). В англоязычной литературе он называется Parameter Space Investigation method (PSI method). За эти годы решено множество прикладных задач из самых разных областей. Во всех случаях были получены интересные для специалистов результаты. Количество публикаций с применением метода достаточно велико и дать их полный обзор даже поверхностно не представляется возможным. Время подтвердило правильность наших рассуждений, положенных в основу метода, который наиболее полно учитывает специфику инженерных задач оптимизации. Метод был создан для решения реальных задач, и в этом основа его успеха.

Первое издание книги, состоящее из пяти глав, значительно расширено. В новом издании главы именуются разделами. Тридцать лет — большой срок, когда речь идет об областях, связанных с применением вычислительной техники. И все же мы решили старую версию книги оставить без изменений: в ней отражены наши взгляды на то время, когда писалась книга.

Теперь о новых результатах. Они представлены во введении ко второму изданию, разделах 6—8, написанных Р. Б. Статниковым, и пунктах Д.8—Д.11 Дополнения, написанных И. М. Соболев.

Метод ИПП позволяет ставить и решать такие важные многокритериальные задачи¹⁾, как проектирование, идентификация, проектирование регулируемых систем, доводка опытных образцов, поиск согласованных решений в больших системах, а также вести многокритериальные исследования в параллельном режиме. За прошедшее время накоплен большой опыт решения реальных многокритериальных задач оптимизации, который излагается в разделах 6—8. Вместе с новыми задачами переосмысливалось и расширялось наше понимание возможностей метода и путей его применения, что нашло свое отражение в новых разделах книги. При этом сохранилось главное — понимание

¹⁾ См. монографии Р. Б. Статникова и И. Б. Матусова [133, 135, 136], а также работы [98, 134, 137].

метода как инструмента для корректного построения допустимого множества и его анализа. В реальных задачах значимость многокритериального анализа трудно переоценить. Он, в частности, показывает специалисту, как улучшить исходную постановку задачи оптимизации, позволяет получить информацию о зависимостях критериев от параметров и критериев от критериев, о роли ограничений в построении допустимого множества и т. д. При этом специалист зачастую ориентируется на прототип, на возможность улучшить его по основным критериям. Он достаточно хорошо понимает ценность того или иного критерия, понимает, *что* приносит в жертву ради улучшения значений основных критериев.

Определение ограничений на функциональные зависимости представляет важный момент в построении допустимого множества, с одной стороны, и одновременно большие трудности для специалистов, с другой стороны. Вопросы представления функциональных зависимостей в виде псевдокритериев для определения ограничений обсуждаются в разделе 6.

Мы не погрешим против истины, если скажем, что можно очень многое оптимизировать, если есть математическая модель. Поэтому особую важность приобретают задачи многокритериальной, или векторной, идентификации. Как по результатам сопоставления натурального эксперимента с математической моделью определить ее качество или ее адекватность реальному объекту, а значит, насколько можно доверять этой модели? Как определить (восстановить) параметры модели? Зная ответы на эти вопросы, можно заниматься поиском оптимальных решений. Количество критериев адекватности (близости) в реальных задачах исчисляется многими десятками. В ряде случаев построить одну модель, которая бы хорошо описывала исследуемые явления, очень трудно или невозможно. В итоге приходится иметь дело не с одной, а с многими моделями. Наконец, эти задачи имеют прямое отношение к очень важной проблеме — доводке опытных образцов объектов (автомобилей, станков, самолетов и т. д.). Решая с помощью метода ИПП задачи векторной идентификации, мы тем самым не только определяем сферу действия математической модели, но и сокращаем время на проведение дорогостоящих процессов доводки реальных объектов (задачи улучшения прототипов). Этим вопросам посвящен раздел 7.

В разделе 8 обсуждаются две важные проблемы.

Первая проблема. Во многих объектах мы имеем два сорта параметров — проектирования и управления. В отличие от параметров управления параметры проектирования (в большинстве случаев

представляющие собой геометрические размеры отдельных деталей), как правило, не могут целенаправленно изменяться в процессе эксплуатации. В разделе обсуждается, что такое оптимальное решение в этом случае и как его искать.

Вторая проблема. Как искать оптимальные решения, если

- (1) расчет одного вектора критериев требует много компьютерного времени и нет возможности провести достаточное число испытаний,
- (2) размерность вектора параметров достигает десятков, сотен и тысяч?

Для таких задач из-за указанных трудностей поиск оптимальных решений чаще всего вообще не проводится. Эти ситуации характерны и для больших систем. Возможность применения метода ИПП для оптимизации в параллельном режиме, т. е. с одновременным участием многих компьютеров, позволяет не только решать указанные выше задачи (1) и (2), но и в ряде случаев исследовать большие системы непосредственно, без декомпозиции их на подсистемы.

Из-за трудностей построения допустимых множеств, как правило, решаются плохо поставленные задачи оптимизации. Поэтому особое внимание уделяется коррекции исходных постановок задач. В разделах 6—8 рассматриваются примеры такой коррекции в задачах улучшения прототипов исследуемых объектов.

Некоторые важные теоретические вопросы развития метода (сходимость приближенного множества Парето) рассмотрены в пункте Д.11.

В приведенной во введении обширной литературе и в разделах 6—8 для зондирования пространства параметров в методе ИПП в подавляющем большинстве случаев использовались ЛП_т-последовательности. Учитывая специфику рассматриваемых задач, *a priori*, до их решения, невозможно утверждать, что какой-либо из датчиков случайных чисел или какая-либо квазислучайная последовательность являются заведомо лучшими для решения конкретной прикладной задачи оптимизации. Это неоднократно отмечали Р. Б. Статников и И. Б. Матусов в работах [133, 135—137]. Сказанное прежде всего относится к задачам, где по объективным причинам проводится недостаточное число испытаний. Недостаточное число испытаний является типичным фактором, характерным для исследования большинства реальных задач, например задач с высокой размерностью вектора параметров. Добавим также задачи, в которых велика стоимость одного испытания (расчет одного вектора критериев требует много компьютерного времени). К подобным работам можно отнести некоторые

конечно-элементные и другие задачи. Для таких задач в методе ИПП могут быть использованы различные генераторы для получения пробных точек. На рис. 2.4 приведен алгоритм метода ИПП, где в качестве генератора пробных точек указаны ЛП_τ-последовательности. В общем случае в качестве генератора пробных точек могут применяться и датчики случайных чисел¹⁾ (ДСЧ), и разные квазислучайные последовательности. Возможность использовать в методе ИПП различные пробные точки — несомненное достоинство метода.

В программном комплексе MOVI [140], реализующем метод ИПП, помимо ЛП_τ-последовательностей предусмотрена возможность применения различных генераторов. Так, например, применение ДСЧ оказалось целесообразным для исследования многокритериальных задач, зависящих от десятков, сотен и тысяч параметров [134]. Один из таких примеров описан в пункте 8.5. В подобной ситуации любые пробные точки не гарантируют детального просмотра пространства параметров, но позволяют найти интересные решения, удовлетворяющие специалиста.

Как уже было сказано, для многих реальных задач до недавнего времени не представлялось возможным искать оптимальные решения из-за большого количества компьютерного времени, необходимого для расчетов. Программный комплекс MOVI позволяет находить эти решения в параллельном режиме.

Цитированная литература состоит из двух списков: первый относится к предисловию, введению и разделам 1—8, второй — к Дополнению.

Метод ИПП включен в ряд спецкурсов по прикладной математике, методам оптимизации, широко используется в различных инженерных дисциплинах, а также в диссертационных работах. Изложенный здесь новый материал был положен в основу курса лекций «Многокритериальный анализ в инжиниринге: проектирование и идентификация»²⁾, который Р. Б. Статников читает с 2002 г. в Naval Postgraduate School (NPS), Monterey, США.

Авторы выражают признательность академику Фролову К. В., директору Института машиноведения Российской академии наук (ИМАШ РАН), который на протяжении многих лет содействовал продвижению метода в промышленности и учебном процессе.

Авторы благодарят сотрудников лаборатории «Теория и методы оптимального проектирования» ИМАШ РАН Матусова И. Б.,

¹⁾ На возможность применения ДСЧ в методе ИПП обратили внимание Р. Штоер и М. Сун в работе [138], опубликованной в 1995 г.

²⁾ «Multicriteria Analysis in Engineering: Design and Identification».

Рымалову С. И., Сахарова В. А., Узволка Ю. Ю., Шенфельда В. В., Фролову О. А., Янушкевича И. В. за их участие во внедрении метода ИПП в многочисленные сферы науки и промышленности.

Мы благодарим Асташева В. К., Бахмутова С. В., Богомолова С. В., Бондаренко М. И., Глазунова В. А., Горобцова А. С., Григорьянца Б. И., Егорова И. Н., Доброходова В. Н., Зверева И. А., Иванова Г. М., Игнатьева В. А., Исянова А. М., Каминскую В. В., Кравченко С. В., Крестина Г. В., Лозино-Лозинского Г. Е., Лурье З. Я., Макеева О. М., Мышецкую Е. Е., Осина М. И., Павлова Ю. С., Перминова М. Д., Плетнева А. Е., Потягайло С. С., Селиванова О. Д., Синельникова Л. Н., Синева А. В., Статникова А. Р., Статникова И. Н., Черных В. В., Феофилову Е. А., Филатова А. А., Якименко О. Н., Ali Anil K., Bordetsky A., McNeill Kevin M., Papoulias F., Peltsverger V. и многих других, принимавших участие в постановке и решении задач оптимизации на основе метода ИПП. Некоторые из этих задач описаны в разделах 6—8.

Мы благодарны DePoy Phil, Johnson Rodney, Kline Jeffrey, Knorr Jeffrey, Stevens Mark, Walker Philip, Welch Joe, Wood Kevin, Franck Chip, Papoulias Fotis, Gaver Donald, Jacobs Patricia, Lucas Tom, Sanchez Susan, Сиорра Том (NPS, США), Choate Paul, Cook Henry, Cushing Jason, Griffin Latan, Gurr James, Hicks David, Zachary Uriah (США), Ali Anil Kivanc (Турция) и всем коллегам, принимавшим участие в обсуждении метода ИПП, его возможностей и приложений.

Мы с благодарностью вспоминаем покойного Станкевича А.И., который был инициатором переиздания нашей книги.

Мы выражаем благодарность Либерману Ю. М. за его полезные советы.

Мы глубоко признательны редактору книгу Вольмир Е. А. и художественному редактору Христичу Ю. В.

Книга возникла в результате многолетнего сотрудничества и выражает наши взгляды на проблему выбора оптимальных параметров. Во-первых, мы считаем необходимым рассматривать задачи оптимального проектирования как многокритериальные, а не сводить их к однокритериальным, так как это, как правило, приводит к серьезно-му огрублению задачи, искажению ее существа, а следовательно, к неоправданной замене одной задачи другой. К такому же выводу в настоящее время приходят многие исследователи, занимающиеся разработкой математических методов оптимального проектирования. Что же касается конструкторов, то они всегда были рады поддержать такую точку зрения, но, к сожалению, достаточно эффективных математических методов для изучения многокритериальных задач не было.

Во-вторых, мы считаем также, что не следует стремиться к полной автоматизации процесса выбора оптимальных параметров: выбор должен осуществлять сам конструктор, но с помощью ЭВМ. Поэтому наиболее рациональными мы считаем алгоритмы, содержащие диалог человека с вычислительной машиной. И эта наша точка зрения также соответствует тенденции, наметившейся в последние годы¹⁾.

Проектирование реальных объектов с учетом многих критериев качества обычно имеет характер эвристического итерационного процесса: конструктор, рассматривая различные варианты модели, оценивает результаты, уточняет постановку задачи, затем снова решает ее и анализирует новые варианты. В процессе проектирования нередко меняются взгляды на значимость отдельных критериев. И это продолжается до тех пор, пока конструктор не решит, что пришло время остановиться: найдено то, что ему нужно. Нам удалось в какой-то мере алгоритмизировать этот процесс, представив его в форме диалога конструктора с ЭВМ: при помощи ЭВМ формируется множество допустимых решений, среди которых конструктор выбирает наилучшее.

Мы старались сделать книгу доступной возможно более широкому кругу читателей и ради этого пожертвовали кое-где математической

¹⁾ См., например, книгу «Современное состояние теории исследования операций» под ред. Н. Н. Моисеева. М.: Наука, 1979.

общностью. Вопросы, связанные с теорией ЛП_τ-последовательностей, вынесены в Дополнение, написанное И. М. Соболев.

Мы считаем своим приятным долгом вспомнить с благодарностью покойного И. И. Артоболевского, который всячески стимулировал нашу работу и в большой степени способствовал внедрению этих методов в практику проектирования механизмов и машин. Мы благодарны Г. В. Крейнину за участие в получении первой таблицы испытаний, Р. П. Федоренко, В. В. Подиновскому и П. С. Краснощекову, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, и С. И. Фридман, которая составила программы для расчета примеров, приведенных в книге.

Инженерные задачи оптимизации по своему существу многокритериальны. Природа их такова, что с улучшением одних критериев качества другие ухудшаются. В процессе проектирования машин, механизмов, конструкций приходится учитывать множество противоречивых критериев качества: материалоемкость, прочность, долговечность, уровни вибрации и шума, энергоемкость, производительность, коэффициент полезного действия, габариты, экономические показатели и др. Подобная ситуация имеет место в подавляющем большинстве прикладных задач самой различной природы: в машиностроении и медицине, химии и энергетике, при исследовании технологических процессов и процессов управления и т. п. Свести многокритериальные задачи к однокритериальным в общем случае не удается.

Всегда считалось, что постановка задачи оптимизации — построение математической модели оптимизируемого объекта, определение оптимизируемых критериев и системы ограничений на параметры, функциональные зависимости и критерии — все это прерогатива специалиста, которая зависит от его искусства. Мы не преуменьшаем роль специалиста в постановке задачи оптимизации. Однако опыт решения реальных задач показал, что одного искусства недостаточно. В таких задачах не только много противоречивых критериев, но и немало *мягких* ограничений, которые — в зависимости от ситуации — могут изменяться и которые *a priori* невозможно сформулировать корректно. Поэтому зачастую решаются плохо поставленные инженерные задачи оптимизации. К сожалению, существующие методы оптимизации, число которых достаточно велико, не помогают в этом.

Как известно, оптимальные решения ищутся на допустимом множестве решений. Когда мы говорим о допустимых проектах, то понимаем, что они должны удовлетворять всем требованиям и ограничениям, многие из которых могут определяться лишь в процессе решения задачи. Искусство оптимального проектирования состоит в том, что нужно уметь строить допустимое множество вариантов проектов, которое содержало бы все наиболее важные и интересные для специалиста решения. На этом множестве имеется подмножество так назы-

ваемых Парето-оптимальных вариантов¹⁾, т. е. таких, которые нельзя улучшить одновременно по всем оптимизируемым критериям. Решение Парето-оптимально, если значение любого из критериев можно улучшить лишь за счет ухудшения хотя бы одного из остальных²⁾. В этом плане Парето-оптимальные решения являются неулучшаемыми. Очевидно, вариант проекта, по которому будет изготавливаться серийная машина, обязательно должен быть Парето-оптимальным.

Поскольку в основе оптимизации прикладных задач лежит корректное определение допустимого множества, трудно рассчитывать на успешный поиск оптимальных решений, если это множество определено неверно или неполно. Такая ситуация достаточно типична при решении современных инженерных задач. Именно поэтому сегодня мы часто сталкиваемся со случаями, когда существующие методы оптимизации ищут решения далеко *не там, где это надо*. Использование, в частности, однокритериальных методов нередко заставляет специалистов искажать исходную постановку проблемы: подгонять реальные многокритериальные задачи под один *самый важный* критерий, строить необоснованные свертки критериев и т. п. Сведение многокритериальных задач в прокрустово ложе однокритериальных приводит к тому, что исходная проблема подменяется новой, и в результате решается *не та задача*.

В мировой литературе методам оптимизации уделяется много внимания. В то же время практически не исследована такая фундаментальная проблема, как определение допустимого множества решений. Для определения допустимого множества решений специалисту нужна помощь. Такая помощь — одно из главных назначений метода исследования пространства параметров (метод ИПП). Метод ИПП основан на построении и анализе допустимого множества решений с помощью таблиц испытаний.

Процесс построения допустимого множества решений и его анализа происходит в интерактивном режиме, диалогах специалиста с компьютером. В ходе таких диалогов многократно пересматриваются различные ограничения и в зависимости от этого определяются допустимые и Парето-оптимальные решения³⁾. Анализ допустимых решений дает уникальную информацию о ресурсах исследуемого объекта, чувствительности критериев к параметрам, взаимосвязи кри-

¹⁾ Парето Вильфредо (*Pareto Vilfredo*, 1848—1923) — итальянский социолог и экономист.

²⁾ Более подробно см. в разделе 3.

³⁾ На самом деле при решении реальных задач, как правило, речь идет о поиске приближенных Парето-оптимальных решений. Именно поиск и анализ таких решений обсуждаются в новых разделах книги.

териев, работе параметрических, функциональных и критериальных ограничений и целесообразности их изменений. Чаще всего после подобного анализа корректируется исходная постановка задачи. Нередки случаи, когда по результатам подобных исследований приходят к выводу о целесообразности коррекции математической модели объекта.

В методе ИПП постановка задачи оптимизации и ее решение — единый процесс. Интерактивное участие специалиста в процессе не только не представляет каких-либо трудностей, но и вызывает интерес. В этом плане метод является дружественным по отношению к человеку. С нашей точки зрения, подавляющее большинство реальных задач оптимизации следует решать в интерактивном режиме.

Остановимся на важном вопросе о количестве критериев при оптимизации реальной задачи. Их число должно быть, прежде всего, не меньше, чем это нужно. Специалист всегда хочет оптимизировать не один, а все наиболее важные критерии, многие из которых антагонистичны. Чем больше критериев будут введены в рассмотрение, тем больше появится информации о возможностях исследуемого объекта, о допустимых приобретениях и потерях, о поиске компромиссных решений. Метод ИПП позволяет специалисту учитывать столько критериев, сколько необходимо. В задачах идентификации число исследуемых критериев достигает многих десятков [44, 45, 61, 97, 98, 133—137, 139]. Чем больше критериев мы рассчитываем, тем у нас больше представления и о работе математической модели, о том, насколько хорошо она описывает те или иные критерии, насколько можно ей доверять. Нередки случаи, когда для расчета вектора критериев объекта мы используем не одну, а несколько математических моделей, поскольку первая модель хорошо описывает одни критерии, вторая — другие и т. д. Об одной из таких задач мы расскажем в пункте 7.5.

Как известно, помимо критериев качества, имеются функциональные зависимости с ограничениями на них. К функциональным ограничениям следует отнести некоторые требования к объекту, которые необходимо выполнять. Большинство ограничений на них заданы не жестко, т. е. их можно некоторым образом изменять. Наш метод помогает специалисту определять функциональные ограничения. Для этого функциональные зависимости с нежесткими ограничениями мы представляем в виде так называемых псевдокритериев.

Неудачно заданные функциональные ограничения, как и ограничения на критерии и параметры, могут значительно уменьшить допустимое множество решений, сделав неоправданно недопустимыми многие интересные решения. Во многих случаях по указанной причине допустимое множество решений оказывается пустым.

Сформулируем основные особенности рассматриваемых прикладных задач оптимизации [98, 133, 135, 136].

(1) Модели, которые описывают исследуемые объекты, могут быть линейными и нелинейными, с детерминированными и стохастическими, распределенными и сосредоточенными параметрами. Целевые функции могут быть нелинейными, недифференцируемыми, область допустимых решений — многосвязной, множества допустимых и Парето-оптимальных решений — невыпуклыми. Многие реальные задачи имеют объем допустимой области на порядки меньше объема исходного параллелепипеда (пространство варьируемых параметров).

(2) Целевых функций (критериев качества) может быть достаточно много. Например, в реальных задачах векторной идентификации их количество может достигать многих десятков. Соответствующие примеры приведены в разделе 7.

(3) Анализ допустимого множества имеет принципиальное значение для пересмотра ограничений и исходных целевых функций, а зачастую — для коррекции самой математической модели.

(4) После анализа допустимого множества и множества Парето специалист определяет наиболее предпочтительные или оптимальные для него решения. Как правило, анализ этих множеств не представляет серьезных трудностей для специалистов. Чаще всего из-за жестких требований к исследуемому объекту множество Парето-оптимальных решений содержит сравнительно немного векторов. Кроме того, специалист, анализируя найденные решения, обычно хорошо представляет относительную значимость критериев.

Ниже перечислены основные классы инженерных задач, исследования которых выполнены с помощью метода ИПП.

Задачи проектирования. Выделим среди них задачи, где используется метод конечных элементов [12, 13, 17, 22, 72, 96, 99, 133, 135, 136]. Это, прежде всего, многочисленные задачи динамики, прочности, теплофизики и др. Общие вопросы оптимального проектирования рассмотрены в исследованиях [25, 37, 82, 95, 98].

Задачи проектирования регулируемых инженерных систем [39, 40, 121, 133, 135]. Здесь речь идет о том, что вектор варьируемых параметров содержит два типа параметров: параметры, которые в процессе эксплуатации объекта не изменяются (неуправляемые параметры), и параметры, которые можно изменять (параметры управления). В связи с этим рассматривается новый подход к выбору оптимальных параметров таких систем.

Задачи векторной идентификации [44, 45, 61, 63, 74, 95—97, 118, 119, 128, 133, 135—137, 139], или восстановления параметров математической модели по результатам, например, натурального эксперимента. При решении практических задач важно оценить степень адекватности математической модели реальному объекту. Такая оценка и составляет существо нового направления — векторной идентификации. Исследования проводятся по критериям близости или адекватности. В реальных задачах идентификации размерности векторов критериев могут достигать многих десятков.

Задачи доводки опытных образцов и улучшения прототипа [61, 95—98, 133, 135—137, 139]. Это также очень большой и важный класс инженерных задач. Здесь вначале идентифицируется математическая модель и ее параметры по критериям близости, а затем улучшается прототип по критериям качества.

Задачи оптимизации больших систем. Вопросы декомпозиции систем обсуждаются в работах [17, 94]. В ряде случаев в результате решения этих задач представляется возможным сформулировать требования к подсистемам [98, 133—136] и искать согласованные решения в интересах системы в целом.

Метод ИПП внедрен в различные сферы промышленности, науки, технологии и в учебный процесс.

Автомобилестроение. Выбор оптимальных параметров рамы автомобиля [22, 133, 135], картера заднего моста автомобиля [72, 99], подвески колеса легкового автомобиля [109—111], механизма газораспределения [26], бампера и задней панели легкового автомобиля [17], многоосных седельных автопоездов [1], коленчатого вала, углового расположения противовесов коленчатого вала и клапанного механизма [85—87]. Задачи синтеза автомобиля по критериям управляемости и устойчивости [8, 9, 15, 24, 113], уровня шума и вибрации [74], динамики автомобиля [123] и др.

Станкостроение, робототехника, гибкие производственные системы. Оптимизация параметров несущей системы одностоечного токарно-карусельного станка [107], кинематических цепей станков [76], внутришлифовальных головок на подшипниках качения [106], шпиндельных узлов металлорежущих станков [44, 45, 135], несущей системы круглошлифовального станка [97, 136], направляющих металлорежущих станков [100]. Компонировка металлорежущих станков [53], несущих систем прецизионных станков [12], несущих систем токарных станков с подвижной бабкой [13]. Конструкции столов многокривошипных листоштамповочных прессов [14], фрезерных станков [31,

32], приводов и несущих узлов трубоотрезных, зуборезных и токарных станков [47, 83], универсальных кривошипных прессов [30], гидравлических систем тяжелонагруженных станков [48, 95, 135]. Гибкие производственные системы для электроэрозионной обработки деталей [131]. Многокритериальный выбор параметров роботов [49].

Авиационно-космические системы и летательные аппараты. Оптимизация подсистем тепловой защиты, силовой конструкции планера и его агрегатов, других объектов аэрокосмических систем [127], авиационных двигателей [39, 40], внешнего облика беспилотных летательных и подводных аппаратов [124]. Идентификация параметров управляемого парашюта [118, 119]. Отметим также другие исследования по проектированию летательных аппаратов и их подсистем [6, 62, 69, 116, 139].

Оптимизация параметров различных машин. Резонансные вибрационные машины технологического обеспечения [58], лесные погрузочно-разгрузочные машины [2], вибрационные и волновые транспортирующие машины [93], горные машины [38], суда [11, 130], мотоциклы [5] и т. п.

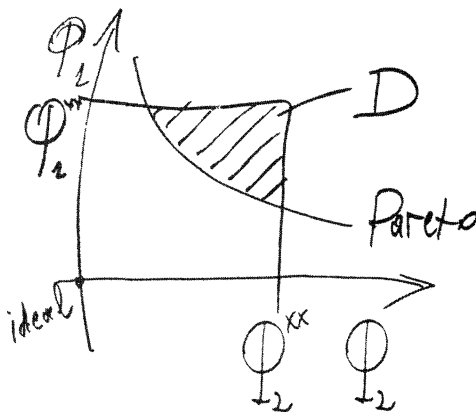
Поиск компромиссных решений в задачах оптимизации различных объектов. Выбор оптимальных параметров трансмиссий главных приводов прокатных станков [41], вибрационных конвейеров [51], состава модульных агрегатов для строительства метрополитенов [4], струговых установок для выемки угля [101], шнековых очистных комбайнов [35, 36], электрогидравлического привода [84], машинных агрегатов автоматизированных транспортно-складских систем [64], пневматических и гидропневматических виброизоляторов [70], виброизоляции карьерных машин [103], активной виброзащитной системы с управляемым демпфированием [42], нелинейной виброзащитной системы с дополнительной связью по ускорению [112], рычажной передачи большегрузных вагонов [34], рабочих органов плодуборочных машин [108], гибкого зонтичного ротора высокоскоростной ультрацентрифуги [46], параллельного манипулятора для экстремальных сред [65, 122], валопроводов машин [29], шестеренных насосов с внутренним зацеплением [59, 60], цилиндрических зубчатых передач [43], эвольвентных червячных передач [7], волновых зубчатых передач [102], механизмов привода режущих аппаратов сельскохозяйственных машин [71], механизма запираения машин для литья под давлением [129], насосов с регуляторами давления, электрогидравлических рулевых приводов и приводов механизации самолетов, приводов промышленных роботов, строительно-дорожных и сельскохозяйственных машин [75], гидроприводов [79], динамических схем свободнопоршневых машин

с магнитной связью [105], электрогидравлического усилителя с жесткой неединичной обратной связью [18] и др.

Отметим также применение метода в **фармации** — оптимизация процесса экстракции свежесобранных плодов боярышника для предупреждения и лечения сердечно-сосудистых заболеваний [66], **петрофизике** — определение коэффициентов открытой пористости Самотлорского нефтяного месторождения [50], **нелинейной адаптивной оптике** — управление световыми пучками в нелинейных средах [54], **волоконной оптике** — определение параметров волоконно-оптических дисков [19, 20], **строительной механике** — оптимизация висячих комбинированных систем повышенной жесткости с учетом деформации [21] и других строительных конструкций [27], в **автоматизации технологических процессов и производств** — для оптимального управления технологическим процессом производства брома в колонном аппарате [88], в конструировании **машин и агрегатов нефтеперерабатывающих и химических производств** — для оптимизации параметров формующих барабанов станков для сборки покрышек пневматических шин [16], в **атомной энергетике** — для расчета атомных реакторов [114], в **сетевых задачах** — для синтеза транспортных сетей [73], в задачах **стратегического маркетинга** [55], в **методике анализа риска и неопределенности** [56] и др. Укажем также на приложение метода для решения задач **Интернета** [117, 128]. Интересным представляется обращение к методу ИПП в **философии** при изучении проблем виртуальной реальности и выбора научной теории [28]. Метод используется в учебном процессе, например [67, 81]. Среди зарубежных работ, посвященных методу, отметим исследования [120, 123, 125, 126, 130, 132, 138].

И последнее. Позади почти тридцать лет успешного применения метода ИПП. Этот опыт убедительно показал, насколько важно, чтобы метод отражал основные особенности задач, на которые он ориентирован.

Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями





Систематический поиск в многомерных областях

В дальнейшем изложении не раз используется метод зондирования пространства параметров, который мы назвали ЛП-поиском [91]. Название это объясняется тем, что в качестве пробных точек в единичном многомерном кубе используются точки ЛП_τ-последовательностей. Математическая теория таких последовательностей достаточно сложна, и поэтому краткие сведения об ЛП_τ-последовательностях перенесены в Дополнение. Здесь же по возможности элементарно разъясняются трудности, связанные с многомерностью рассматриваемых областей, заставившие нас отказаться от традиционных решетчатых сеток и воспользоваться ЛП-поиском.

Читатель, которому этот раздел покажется трудным, может перейти непосредственно к разделу 2, приняв на веру, что имеется эффективный алгоритм выбора пробных точек, равномерно расположенных в конечных многомерных областях (размерности $n \leq 51$).

1.1. Поиск в многомерном кубе

Рассмотрим единичный n -мерный куб K^n , состоящий из точек P с декартовыми координатами x_1, \dots, x_n

$$P = (x_1, \dots, x_n),$$

удовлетворяющими неравенствам $0 \leq x_j \leq 1$ при $j = 1, 2, \dots, n$.

Кубические решетки. Обычно полагают, что наиболее равномерный просмотр такого куба обеспечивает кубическая решетка (рис. 1.1), состоящая из $N = M^n$ точек с координатами

$$\left(\frac{i_1 + 1/2}{M}, \frac{i_2 + 1/2}{M}, \dots, \frac{i_n + 1/2}{M} \right),$$

где i_1, \dots, i_n независимо принимают все значения $0, 1, \dots, M-1$. Однако это неверно. Такая решетка оптимальна только в одномерном случае, при $n = 1$ (рис. 1.2).

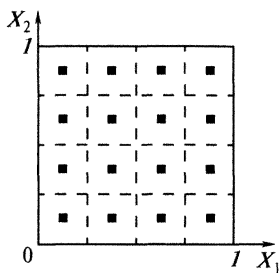


Рис. 1.1. Кубическая решетка при $n = 2$ ($N = 16$)

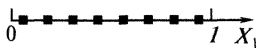


Рис. 1.2. Кубическая решетка при $n = 1$ ($N = 8$)

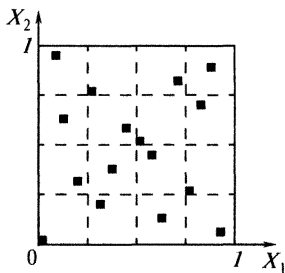


Рис. 1.3. Улучшенная сетка при $n = 2$ ($N = 16$)

Уже при $n = 2$ она не очень хороша, а с увеличением n «равномерность» ее быстро ухудшается. Строгая формулировка этого утверждения приведена в Дополнении. Впервые вывод о том, что кубические решетки в K^n — это плохие сетки при больших n , был сделан в 1957 г. в работе [89].

Впрочем, нетрудно привести элементарные соображения, разъясняющие такое, на первый взгляд парадоксальное, положение.

Сравним двухмерную сетку, изображенную на рис. 1.1, с сеткой, изображенной на рис. 1.3, которая также состоит из 16 точек. В обоих случаях каждому из 16 малых квадратов принадлежит одна и только одна точка сетки, так что, казалось бы, равномерность расположения точек обеих сеток примерно одинакова. Ситуация, однако, резко изменится, если потребуются исследовать функцию $f(x_1, x_2)$, определенную в K^2 , которая сильно зависит лишь от одного аргумента, например $f = f(x_1)$. В этом случае, вычислив значения функции f в точках первой сетки, мы получим лишь четыре различных значения, каждое повторенное четыре раза; а при расчете f в точках второй сетки получим 16 значений, дающих гораздо лучшее представление о диапазоне изменения функции f .

В многомерном случае кубическая решетка оказывается еще хуже, так как потеря информации при вычислении $f(x_1, \dots, x_n)$ может еще более возрасти: вычислив $N = M^n$ значений функции $f(x_1)$, мы получим всего лишь $M = N^{1/n}$ различных значений!

Конечно, приведенные рассуждения с рассмотрением $f(x_1)$ — это крайний, самый неблагоприятный случай. В действительности функции $f(x_1, \dots, x_n)$, встречающиеся на практике, сильно зависят от нескольких переменных, но не от всех. И мы никогда не можем быть уверенными, что нельзя представить $f(x_1, \dots, x_n)$ в форме

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) + h(x_1, \dots, x_n),$$

где $m < n$ и $g \gg h$. Если же такое представление имеет место, то упомянутая выше потеря информации будет налицо: сосчитав $N = M^n$

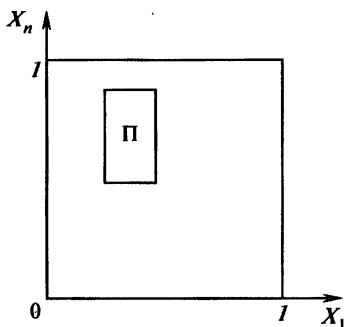


Рис. 1.4. Параллелепипед Π в n -мерном кубе K^n

значений f , мы получим всего $M^m = N^{m/n}$ существенно различных значений функции. Количество «лишних» точек $N - N^{m/n}$ с увеличением M катастрофически растет. Например, если $n = 5$, $m \doteq 3$ и $M = 10$, то

$$N - N^{m/n} = M^5 - M^3 = 99\,000$$

из общего числа $N = M^5 = 100\,000$.

Отсюда следует вывод: проекции точек хороших многомерных сеток в кубе K^n на m -мерные грани этого куба должны представлять собой хорошие m -мерные сетки, и это должно быть верно при любых $m = 1, 2, \dots, n - 1$.

Равномерно распределенные последовательности точек в K^n .

Пусть P_1, \dots, P_i, \dots — последовательность точек, принадлежащих K^n . Выберем в K^n произвольный n -мерный параллелепипед Π со сторонами, параллельными координатным граням (рис. 1.4). Обозначим через $S_N(\Pi)$ количество точек P_i с номерами $1 \leq i \leq N$, принадлежащих Π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность точек P_1, \dots, P_i, \dots называется *равномерно распределенной* в K^n , если для любого Π

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = V_\Pi, \tag{1.1}$$

где V_Π — объем (n -мерный) параллелепипеда Π .

Можно доказать, что если G — произвольная область, расположенная в K^n и имеющая объем V_G , то из (1.1) вытекает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(G)}{N} = V_G. \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) показывает, что при достаточно больших N количество точек последовательности, принадлежащих G , пропорционально объему G :

$$S_N(G) \sim NV_G. \tag{1.3}$$

Легко также доказать, что проекции точек равномерно распределенной последовательности на любую m -мерную грань куба K^n при $m < n$ образуют равномерно распределенную последовательность в K^m . Таким образом, требование, сформулированное в конце предыдущего

пункта, в какой-то мере выполняется для точек P_1, \dots, P_N , составляющих начальный участок равномерно распределенной последовательности.

Несмотря на то, что определение и первые примеры равномерно распределенных последовательностей были указаны Г. Вейлем еще в 1916 г., использование таких последовательностей в вычислительной математике началось только в 60-х гг. XX в., когда удалось построить последовательности, для которых скорость сходимости в (1.1) при $N \rightarrow \infty$ близка к наилучшей, а равномерность расположения наблюдается начиная с небольших N . (Заметим, что определение (1.1) зависит только от асимптотических свойств последовательности: если изменить, выбросить, добавить любое конечное число любых точек последовательности, то предел (1.1) не изменится.)

Использование в качестве сеток начальных участков P_1, \dots, P_N равномерно распределенной последовательности имеет еще одно достоинство: количество точек сетки может быть удвоено добавлением еще N точек P_{N+1}, \dots, P_{2N} . (При использовании кубических решеток удвоение M вынуждает увеличить количество точек сразу в 2^n раз; а замена M на $M + 1$ заставляет все точки новой сетки считать заново.)

Простейший поиск. Предположим, что функция $F(P)$ кусочно непрерывна¹⁾ в K^n и требуется приближенно найти точку \hat{P} такую, что

$$F(\hat{P}) = \min_{P \in K^n} F(P).$$

Приближенных методов отыскания минимума функции очень много (см., например, работы [52, 80, 104]), но в большинстве своем это локальные методы, сходимость которых гарантируется лишь в достаточно малой окрестности минимума. Если же речь идет о нахождении глобального минимума, то выбор методов поиска более ограничен.

Рассмотрим простейший случайный поиск, который состоит в следующем. В K^n выбираем N независимых случайных точек $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, равномерно распределенных в K^n (здесь имеется в виду равномерное распределение в теоретико-вероятностном смысле). Среди значений $F(\Gamma_1), \dots, F(\Gamma_N)$ находим наименьшее

$$F(\Gamma_{i_0}) = \min_{1 \leq i \leq N} F(\Gamma_i).$$

¹⁾ Более подробно требование кусочной непрерывности означает, что K^n можно представить в виде суммы конечного числа простых замкнутых областей, в каждой из которых $F(P)$ непрерывна и имеет конечные предельные значения на границе.

Если таких несколько, то выбираем любое из них. Далее считаем, что $F(\Gamma_{i_0}) \approx \min F(P)$, $\Gamma_{i_0} \approx \hat{P}$.

Сходимость такого поиска доказывается достаточно просто. Пусть H — произвольная окрестность единственной точки \hat{P} и объем V_H положителен. Так как вероятность $P\{\Gamma \in H\} = V_H$, то вероятность того, что хотя бы одна из точек $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ попадет в H , равна $1 - (1 - V_H)^N$ и при $N \rightarrow \infty$ стремится к 1. Следовательно, при достаточно больших N вероятность попадания хотя бы одной пробной точки в любую окрестность точки минимума \hat{P} как угодно близка к 1.

Легко показать, что в качестве пробных точек в простейшем поиске можно использовать точки P_1, \dots, P_j, \dots , образующие равномерно распределенную последовательность. В самом деле, так как, согласно (1.3),

$$S_N(H) \sim NV_H,$$

при $N \rightarrow \infty$ количество пробных точек, попавших в H , окажется как угодно большим.

Поиск будет тем лучше, чем более равномерно расположены в K^n пробные точки (если, конечно, нет никакой предварительной информации о положении минимума). Случайны ли они, или нет, — не столь важно. Нам не раз приходилось слышать от вычислителей, что в их экспериментах при $n \geq 4$ случайный поиск оказывался лучше неслучайного. Однако во всех этих экспериментах в качестве неслучайных пробных точек использовались точки кубической решетки, а, как мы уже знаем, расположение этих точек следует расценивать как плохое.

ЛП-поиск. Мы предложили использовать в качестве пробных точек ЛП_τ-последовательностей, которые являются наиболее равномерно распределенными среди всех известных в настоящее время последовательностей. Многочисленные эксперименты, проведенные с целью сравнения ЛП-поиска с простейшим случайным поиском, неизменно показывали преимущество ЛП-поиска, хотя количественные характеристики «выигрыша» меняются в зависимости от рассматриваемых задач.

Пример 1.1 [91]. Максимум весьма сложной функции Φ , зависящей от девяти переменных, оценивался по значениям в случайных точках $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ и в точках ЛП_τ-последовательности Q_1, \dots, Q_N .

Результаты, полученные при различных N , приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1
Поиск максимума Φ

N	512	1024	2048
max $\Phi(\Gamma_i)$	42,29	42,29	43,52
max $\Phi(Q_i)$	48,12	48,61	48,61

Можно указать два класса задач, при решении которых ЛП-поиск оказался очень полезным. Во-первых, это задачи, в которых одновременно требуется оценить максимумы и (или) минимумы нескольких функций, заданных в K^n , ибо это можно сделать по одним и тем же пробным точкам. Во-вторых, это задачи, в которых для отыскания глобального экстремума многоэкстремальной функции используют локальные методы оптимизации. Чтобы не попасть вместо глобального в какой-нибудь из локальных экстремумов, приходится повторять локальный поиск много раз, начиная из различных начальных точек. Очевидно, что начальные точки должны быть равномерно расположены в K^n . Самым эффективным способом выбора начальных точек оказалось использование точек ЛП_т-последовательности.

В заключение заметим, что ЛП_т-последовательности — это наилучшие среди известных в настоящее время равномерно распределенных последовательностей. Если в будущем удастся построить еще лучшие последовательности (с достаточно простым алгоритмом расчета и с более равномерным расположением точек), то все алгоритмы, изложенные в книге, останутся применимыми и для них.

1.2. Поиск в произвольной ограниченной области

В этом разделе рассмотрены некоторые достаточно простые преобразования равномерно распределенных последовательностей, которые используются в дальнейшем. Все приводимые здесь результаты имеют весьма прозрачный геометрический смысл.

Равномерно распределенные последовательности точек в ограниченной области G . Обозначим через G произвольную n -мерную ограниченную область, имеющую конечный объем $V_G > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность точек P_1, \dots, P_p, \dots , принадлежащих G , называется *равномерно распределенной* в G , если для любого Π , принадлежащего G (обозначения см. в пункте 1.1),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = \frac{V_\Pi}{V_G}. \quad (1.4)$$

Чтобы убедиться в том, что (1.1) есть частный случай (1.4), достаточно вспомнить, что объем K^n равен 1, так что в (1.1) вместо V_Π можно было бы написать V_Π/V_{K^n} .

Многочисленные приемы, используемые в методах Монте-Карло для моделирования различных случайных величин, позволяют

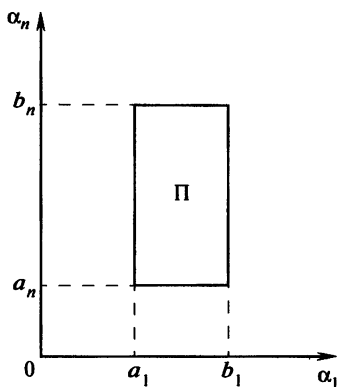


Рис. 1.5. Иллюстрация к доказательству леммы 1

находить точки P_1, \dots, P_j, \dots , равномерно распределенные в произвольной области G , путем преобразования точек Q_1, \dots, Q_j, \dots , равномерно распределенных в K^n . Эти приемы достаточно подробно освещены в книге [90], и мы не будем на них останавливаться. Ниже нам понадобятся только формулы для расчета последовательности точек, равномерно распределенной в заданном параллелепипеде Π со сторонами, параллельными координатным граням (рис. 1.5).

равномерно распределенную последовательность в K^n , то точки A_i с декартовыми координатами $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$, где при $j = 1, 2, \dots, n$

ЛЕММА 1. Если точки Q_i с декартовыми координатами $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ образуют

$$\alpha_{i,j} = a_j + (b_j - a_j)q_{i,j}, \quad (1.5)$$

образуют равномерно распределенную последовательность в параллелепипеде Π , состоящем из точек $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leq \alpha_j \leq b_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольный параллелепипед $\Pi_0 \subset \Pi$, который определяется неравенствами $a_j^0 \leq \alpha_j \leq b_j^0$. Точкам Π_0 в силу преобразования (1.5) взаимно-однозначно соответствуют точки параллелепипеда $\tilde{\Pi} \subset K^n$, который определяется неравенствами

$$(a_j^0 - a_j)/(b_j - a_j) \leq x_j \leq (b_j^0 - a_j)/(b_j - a_j).$$

Поэтому количество точек $A_i \in \Pi_0$, которое мы обозначим через $S_N(\Pi_0)$, равно количеству точек $Q_i \in \tilde{\Pi}$, которое мы обозначим через $\tilde{S}_N(\tilde{\Pi})$. А так как объемы этих параллелепипедов равны соответственно

$$V_{\Pi_0} = \prod_{j=1}^n (b_j^0 - a_j^0), \quad V_{\tilde{\Pi}} = \prod_{j=1}^n \frac{b_j^0 - a_j^0}{b_j - a_j} = \frac{V_{\Pi_0}}{V_{\Pi}},$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi_0)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{S}_N(\tilde{\Pi})}{N} = V_{\tilde{\Pi}} = \frac{V_{\Pi_0}}{V_{\Pi}},$$

что и требовалось доказать.

Метод отбора для равномерно распределенных последовательностей. Более или менее очевидно, что если среди точек A_1, \dots, A_i, \dots , образующих равномерно распределенную последовательность в Π , отбирать все точки, принадлежащие некоторой области $G \subset \Pi$, то получим последовательность точек, равномерно распределенную в G . Так как этот прием неоднократно используется в дальнейшем, то приведем строгое доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть A_1, \dots, A_i, \dots — последовательность точек, равномерно распределенная в Π , а $G \subset \Pi$ — произвольная область с положительным объемом $V_G > 0$. Если среди точек A_i отобрать все точки, принадлежащие G , то получим последовательность точек, равномерно распределенную в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_{i_1}, \dots, A_{i_N} — первые N среди отобранных точек. Если номер последней из них равен N' (т. е. $A_{i_N} \equiv A_{N'}$), то легко видеть, что $S_{N'}(G) = N$. Выберем теперь произвольный параллелепипед $\Pi_0 \subset G$ и обозначим через $\tilde{S}_N(\Pi_0)$ количество точек, принадлежащих Π_0 , из числа отобранных точек A_{i_1}, \dots, A_{i_N} . Тогда $\tilde{S}_N(\Pi_0) = S_{N'}(\Pi_0)$, ибо те из точек $A_1, \dots, A_{N'}$, которые не попали в G , тем более не могли попасть в Π_0 . Значит,

$$\frac{\tilde{S}_N(\Pi_0)}{N} = \frac{S_{N'}(\Pi_0)}{N'} \frac{N'}{N} = \frac{S_{N'}(\Pi_0)}{N'} \frac{N'}{S_{N'}(G)} \rightarrow \frac{V_{\Pi_0}}{V_G},$$

когда N , а вместе с ним и N' стремится к ∞ . Тем самым лемма может считаться доказанной.

Отношение объемов

$$\gamma = V_G/V_\Pi$$

в теории методов Монте-Карло называют *эффективностью отбора*, так как в среднем для получения одной точки в G приходится рассмотреть $1/\gamma$ точек в Π . При $\gamma \ll 1$ метод отбора становится малоэффективным.



Выбор критериальных ограничений

Задачи проектирования в действительности многокритериальны: чем больше критериев качества вводится в рассмотрение, тем более полную характеристику достоинств и недостатков проектируемой машины можно получить. Однако техническое задание на разработку машины с указанием требований, предъявляемых к ней, — это еще не математическая задача. Сформулировать корректную математическую задачу в реальных условиях достаточно трудно [92, 3].

Именно эта ситуация рассмотрена в пункте 2.1, а в пункте 2.2 изложена методика, позволяющая конструктору с помощью ЭВМ выбирать разумную постановку задачи. Мы считаем нужным подчеркнуть оригинальность этой методики, так как обычно ЭВМ используется только для решения математических задач, а постановка задачи предполагается вне математики.

Некоторые особенности предложенной методики обсуждаются в пункте 2.3, а пример ее использования приведен в пункте 2.4.

2.1. Исходные данные

Предположим, что задана математическая модель исследуемой или проектируемой системы и модель эта зависит от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Слова «задана математическая модель» означают, что имеются формулы (или готовые программы), позволяющие по заданному набору $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ вычислить любые интересующие нас характеристики системы. Сами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ могут быть естественными физическими величинами, например, массами, радиусами, жесткостями и т. п., или, если единицы измерения этих величин фиксированы, могут считаться безразмерными. Если функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то в качестве параметров можно выбирать коэффициенты или начальные значения этих уравнений.

Пространство параметров. Пространством параметров называется n -мерное пространство, состоящее из точек A с декартовыми координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Таким образом, каждой точке A пространства

параметров соответствует конкретный набор параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и наоборот.

Как правило, проектировщики могут указать разумные пределы изменения каждого из параметров, которые мы будем называть *параметрическими ограничениями*

$$\alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{**} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Ограничения (2.1) выделяют в пространстве параметров параллелепипед $\Pi = \{A \mid (2.1)\}$ (рис. 2.1), n -мерный объем которого равен произведению

$$V_{\Pi} = (\alpha_1^{**} - \alpha_1^*) \dots (\alpha_n^{**} - \alpha_n^*).$$

В дальнейшем нас будут интересовать только точки A , принадлежащие Π : им и только им соответствуют системы, параметры которых удовлетворяют ограничениям (2.1).

Так как наш метод основан на зондировании параллелепипеда Π конечным числом пробных точек, без необходимости расширять границы (2.1) не рекомендуется: при этом объем возрастает, и для просмотра может потребоваться больше точек.

Функциональные ограничения. Кроме параметрических ограничений, обычно в условия задачи включаются *функциональные ограничения*

$$c_l^* \leq f_l(A) \leq c_l^{**} \quad (l = 1, 2, \dots, t). \quad (2.2)$$

Здесь $f_l(A)$ — некоторые функции от параметров $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Они могут быть заданы явно. Но если, например, функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то $f_l(A)$ часто представляют собой функционалы, зависящие от интегральных кривых этих уравнений. Мы предполагаем, что все функции $f_l(A)$ непрерывны в Π .

Обозначим через G подмножество параллелепипеда Π , состоящее из точек A , удовлетворяющих ограничениям (2.2) (рис. 2.2):

$$G = \{A \mid (2.1), (2.2)\}.$$

Множество G , вообще говоря, может быть любым замкнутым множеством. Единственное ограничение: объем G должен быть положительным ($V_G > 0$).

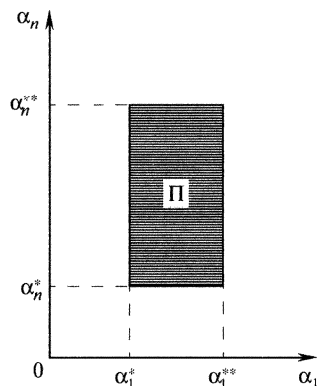


Рис. 2.1. Параллелепипед Π в пространстве параметров

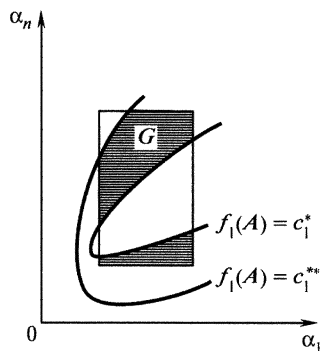


Рис. 2.2. Множество G в параллелепипеде Π

С математической точки зрения требования, предъявляемые к G , должны быть несколько более жесткими: множество G должно совпадать с замыканием множества своих внутренних точек. Именно это требование обеспечивает отсутствие в G компонент меньшей размерности, чем n . Однако с точки зрения практики последнее требование излишне: такого положения всегда можно добиться сколь угодно малым изменением величин c_l^* и (или) c_l^{**} .

Можно сказать, что требование $V_G > 0$ исключает из рассмотрения задачи с функциональными ограничениями в форме равенств, например $f(A) = c$.

Впрочем, в некоторых случаях удается разрешить систему ограничений вида

$$f_l(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c_l \quad (l = 1, 2, \dots, n - t)$$

относительно $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_j = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_t; c_1, \dots, c_{n-t}) \quad (j = t + 1, \dots, n).$$

Тогда можно рассматривать задачу в t -мерном пространстве параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ без этих ограничений, а значения $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n$ считать известными функциями $\alpha_j = \varphi_j$ от $\alpha_1, \dots, \alpha_t$.

Критерии качества. Критерием качества называется характеристика системы, которая связана с ее качеством монотонной зависимостью. Иными словами, при прочих равных условиях система тем лучше, чем больше (меньше) критерий.

Для простоты записи мы всюду в дальнейшем будем предполагать, что все заданные критерии $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$ желательны уменьшить:

$$\Phi_v(A) \rightarrow \min.$$

Следовательно, чем меньше $\Phi_v(A)$, тем лучше система (при прочих равных условиях).

Формально любой критерий можно привести к такому виду, заменяя, если это нужно, Φ_v на $1/\Phi_v$ или на $-\Phi_v$. Однако делать это совсем необязательно: конструктору удобнее оперировать привычными реальными величинами. А как видно будет из дальнейшего, алгоритм выбора критериальных ограничений легко реализовать и тогда, когда некоторые из критериев желательны максимизировать. Относительно функций $\Phi_v(A)$ мы также будем предполагать, что они непрерывны в Π .

Сформулировать математическую оптимизационную задачу при наличии нескольких критериев качества совсем непросто, ибо критерии эти часто противоречат друг другу. Например, уменьшая вес ма-

шины (что часто очень желательно), мы в то же время уменьшаем ее прочность (что как раз нежелательно). Или чрезмерное снижение стоимости изделия может обернуться ухудшением других его качеств.

Иногда полагают, что все дело в удачном выборе решающего критерия качества $\Phi(A)$, который «должен» соединить в себе (т. е. учесть) значения и важность каждого из индивидуальных критериев $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$. Однако замена нескольких критериев единым — проблема сложная и не всегда разрешимая. В большинстве реальных задач такой подход себя не оправдывает, так как при грубом выборе $\Phi(A)$ решение математической задачи об отыскании точки \tilde{A} , в которой

$$\Phi(\tilde{A}) = \min_{A \in G} \Phi(A),$$

оказывается практически плохим из-за того, что некоторые из значений $\Phi_v(\tilde{A})$ превышают допустимые (по мнению проектировщиков) пределы. Чтобы избежать такой ситуации, необходимо ввести *критериальные ограничения*

$$\Phi_v(A) \leq \Phi_v^{**} \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (2.3)$$

Критериальное ограничение Φ_v^{**} — это худшее значение критерия $\Phi_v(A)$, которое проектировщик считает приемлемым.

Пусть D — множество точек A , которые удовлетворяют всем ограничениям (2.1), (2.2) и (2.3):

$$D = \{A \mid (2.1), (2.2), (2.3)\},$$

так что $D \subseteq G \subseteq \Pi$; если множество D непусто, то оно замкнуто (рис. 2.3). Естественно назвать D *множеством допустимых точек*, ибо если сформулировать задачу об отыскании точки \tilde{A} такой, что

$$\Phi(\tilde{A}) = \min_{A \in D} \Phi(A), \quad (2.4)$$

то решение этой задачи всегда существует и конструктора устраивает: как бы ни был выбран решающий критерий $\Phi(A)$, все значения $\Phi_v(A)$ удовлетворяют ограничениям (2.3).

Таким образом, мы видим, что главная трудность при переходе к математической задаче (2.4) состоит в выборе критериальных ограничений Φ_v^{**} и в обеспечении непустоты множества допустимых точек D . Требования, предъявляемые нами к множеству D ,

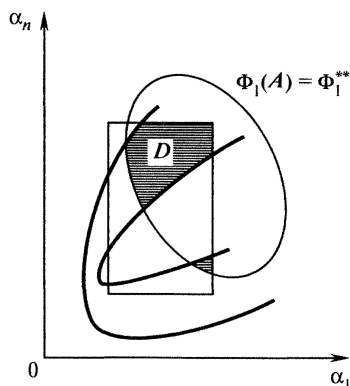


Рис. 2.3. Множество допустимых точек D

такие же, как требования к множеству G (см. выше «Функциональные ограничения»).

По нашему убеждению, обоснованный выбор критериальных ограничений невозможен без предварительного исследования системы: необходимо определить возможности системы по каждому из критериев в области G и, в частности, представлять себе диапазоны изменения каждого из критериев. В следующем пункте изложен численный алгоритм, позволяющий выбирать Φ_v^{**} в процессе диалога конструктора с ЭВМ, гарантируя при этом непустоту множества D .

2.2. Диалоговый алгоритм

В основе нашего алгоритма лежит численное исследование (зондирование) пространства параметров проектируемой системы. Блок-схема алгоритма метода исследования пространства параметров изображена на рис. 2.4. Последний ее блок — оптимизация — обсуждается в разделе 3. Исследование проводится в три этапа.

1-й этап: составление таблиц испытаний. Этот этап выполняется ЭВМ без вмешательства человека. Последовательно выбираются N пробных точек A_1, \dots, A_N , равномерно расположенных в G (как это делается, см. ниже). В каждой из точек A_i рассчитывается система и вычисляются значения всех критериев $\Phi_1(A_i), \dots, \Phi_k(A_i)$. По каждому критерию составляется таблица испытаний, в которой значения $\Phi_v(A_1), \dots, \Phi_v(A_N)$ расположены в порядке возрастания

$$\Phi_v(A_{i_1}) \leq \Phi_v(A_{i_2}) \leq \dots \leq \Phi_v(A_{i_N}) \quad (2.5)$$

и указаны номера i_1, i_2, \dots, i_N соответствующих пробных точек (свои для каждого v). Такие таблицы представляют собой аналог статистических вариационных рядов. Как следует из пункта 1.1, при $N \rightarrow \infty$ наименьшее значение $\Phi_v(A_{i_1})$ стремится к $\min_{A \in G} \Phi_v(A)$, а наибольшее — $\Phi_v(A_{i_N})$ — стремится к $\max_{A \in G} \Phi_v(A)$. Но таблица испытаний показывает не только приближенные значения максимума и минимума $\Phi_v(A)$ в области G : по таблице можно судить о частоте тех или иных значений $\Phi_v(A)$.

Фрагменты реальных таблиц испытаний приведены в табл. 2.3 и табл. 5.3.

2-й этап: выбор критериальных ограничений. Этот этап предполагает вмешательство проектировщика. Просматривая поочередно каждую из таблиц, он должен назначить ограничение Φ_v^{**} для каждого критерия.

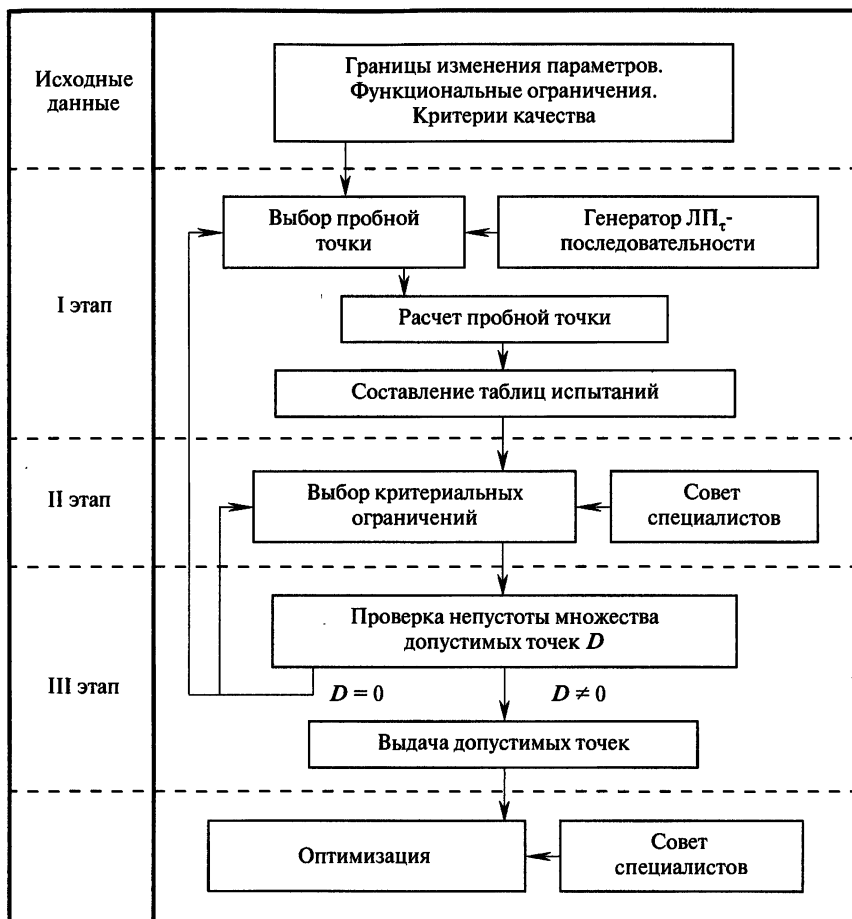


Рис. 2.4. Блок-схема алгоритма метода исследования пространства параметров

Стоит подчеркнуть, что наш диалог очень удобен для проектировщика: он не должен комбинировать, уменьшая одни критерии за счет других; ему показывают одну таблицу испытаний и предлагают назначить одно ограничение; затем повторяют то же с другой таблицей испытаний. Конечно, конструктор заинтересован в том, чтобы все Φ_v^{**} были по возможности меньше, но он понимает, что если выбирать Φ_v^{**} неоправданно малыми, то множество допустимых точек окажется пустым.

3-й этап: проверка непустоты D . Этот этап также выполняется автоматически, без вмешательства человека. Фиксируем какой-нибудь из критериев, например $\Phi_1(A)$, и рассмотрим соответствующую ему

таблицу испытаний. Пусть s — количество значений в этой таблице, удовлетворяющих выбранному критериальному ограничению Φ_1^{**} , так что

$$\Phi_1(A_{i_1}) \leq \dots \leq \Phi_1(A_{i_s}) \leq \Phi_1^{**}.$$

Путем перебора значений всех критериев в точках A_{i_1}, \dots, A_{i_s} не трудно проверить, есть ли среди этих точек хотя бы одна такая, в которой справедливы одновременно все неравенства (2.3)

$$\Phi_v(A_{i_j}) \leq \Phi_v^{**} \quad (v = 1, 2, \dots, k)$$

(при $v = 1$ можно, конечно, не проверять). Если такая точка A_{i_j} существует, то множество D , определенное неравенствами (2.1), (2.2) и (2.3), непусто, и задача (2.4) разрешима (при любом выборе $\Phi!$).

В противном случае следует вернуться ко второму этапу и потребовать от конструктора уступок при назначении Φ_v^{**} . Если такие уступки невозможны, то необходимо вернуться к первому этапу и увеличить количество N пробных точек, чтобы повторить второй и третий этапы с таблицами испытаний большего объема.

Наконец, если при неоднократном увеличении N точки A_{i_j} , принадлежащие D , не обнаруживаются, то есть все основания считать, что выбранные критериальные ограничения Φ_v^{**} несовместны. Конечно, нельзя категорически исключить возможность того, что в некоторой точке A' , отличной от всех пробных точек A_1, \dots, A_N , все неравенства (2.1), (2.2) и (2.3) выполнены. Однако если даже такая точка A' существует, то ее окрестность, в которой эти неравенства сохраняются, очень мала (объем ее порядка V_G/N) и практически система, соответствующая точке A' , будет неустойчивой.

Замечание. Можно сказать, что на первом этапе вычисляется матрица критериев $\|\Phi_v(A_{i_j})\|$, размер которой $k \times N$, и ЭВМ просматривает по одной все k строк этой матрицы. На третьем этапе ЭВМ просматривает s столбцов этой же матрицы.

Выбор пробных точек. Во всех расчетах мы использовали точки ЛП $_{\tau}$ -последовательности $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$, сведения о которых изложены в Добавлении. Согласно лемме 1 из пункта 1.2, мы по декартовым координатам очередной точки

$$Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$$

вычисляем декартовы координаты точки $A^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$, принадлежащей параллелепипеду Π :

$$\alpha_j^{(i)} = a_j^* + (a_j^{**} - a_j^*)q_{i,j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.6)$$

При $A = A^{(i)}$ рассчитываем проектируемую систему и проверяем выполнение функциональных ограничений (2.2). Если они выполнены, то точка $A = A^{(i)}$ отбирается в качестве пробной точки в G и вычисляются все $\Phi_v(A)$; в противном случае точка $A = A^{(i)}$ отбрасывается. Используемые на первом этапе пробные точки A_1, \dots, A_N — это первые N отобранных таким образом точек. Согласно лемме 2 из пункта 1.2, эти пробные точки при $N \rightarrow \infty$ образуют последовательность, равномерно распределенную в G .

Пусть N' — количество точек $A^{(i)}$ в Π , которые надо проверить для того, чтобы отобрать N пробных точек в G . Так как $N/N' \approx V_G/V_\Pi = \gamma$ (см. пункт 1.2), то $N' \approx N/\gamma$.

Пусть τ — время расчета системы в одной точке $A^{(i)}$, а T_N — полное время расчета N пробных точек в G . Из равенства $T_N = N'\tau$ получаем, что

$$T_N \approx N\tau/\gamma. \quad (2.7)$$

На практике величины τ и γ , входящие в формулу (2.7), численно оцениваются по сравнительно небольшому количеству испытаний. После этого формула (2.7) позволяет оценить время T_N , необходимое для составления таблиц испытаний любого заданного объема N . При решении сложных задач объем таблиц испытаний N обычно ограничен из-за ограниченности компьютерного времени T_N . Однако следует иметь в виду, что если выбираются параметры машины, предназначенной для серийного производства, то любые разумные затраты времени T_N будут оправданы.

Нередко задают конкретный вопрос: каким должно быть N ? Однозначно ответить на такой вопрос нельзя: это зависит не только от τ и γ , входящих в формулу (2.7), но и от характера изменения функций $\Phi_v(A)$. Во многих решавшихся нами реальных задачах, связанных с проектированием различных машин, достаточно было выбирать $N' = 128$ или $N' = 256$ — даже при количестве параметров n , достигавшем 30. В некоторых задачах, где время τ расчета одного варианта мало, количество испытаний доводилось до $N' = 4096$, хотя существенных уточнений это, как правило, не давало.

Напротив, в двух сложных задачах пришлось ограничиться значениями $N' \approx 60$; и хотя при этом числа N были всего лишь около 20, полученные результаты вызвали у проектировщиков большой интерес.

Последовательность D_N . На третьем этапе мы находим не одну, а q точек, принадлежащих D . Очевидно, $q \leq N$. Множество этих точек обозначим через D_N . Способ построения и отбора точек D_N (см. в

пункте 1.2 лемму 2) гарантирует, что $q \rightarrow \infty$, когда $N \rightarrow \infty$, и последовательность этих точек равномерно распределена в D . Эти точки чрезвычайно полезны для последующего решения оптимизационной задачи (2.4). Об этом подробнее сказано в разделе 3.

2.3. Некоторые особенности алгоритма

Функциональные ограничения и псевдокритерии. При традиционном подходе к многокритериальным задачам нередко пытаются сократить количество критериев, заменяя их функциональными ограничениями. Например, встречается рекомендация выбрать один из критериев в качестве решающего, а на остальные наложить ограничения; при этом предполагается, что ограничения задаются априорно, хотя, как мы уже отмечали, обоснованно задать их совсем непросто.

С точки зрения нашей методики выгоднее поступать наоборот: если функциональное ограничение

$$c_i^* \leq f_i(A) \leq c_i^{**}$$

не абсолютное, т. е. если конструктор допускает, что c_i^* и (или) c_i^{**} могут быть изменены, то стоит вместо этого ограничения ввести псевдокритерий, например

$$\Phi_{k+1} = f_i(A).$$

Это не критерий, ибо здесь нет монотонной зависимости от качества. Однако разумные ограничения для $\Phi_{k+1}(A)$ можно будет выбрать, изучив таблицу испытаний этой величины.

Если по мнению конструктора значение \bar{c}_i для величины $f_i(A)$ было бы «весьма хорошим», то в качестве псевдокритерия удобно ввести величину

$$\Phi_{k+1} = |f_i(A) - \bar{c}_i|.$$

Тогда для Φ_{k+1} можно будет выбрать лишь одностороннее ограничение $\Phi_{k+1}(A) \leq \Phi_{k+1}^{**}$, и при этом окажется, что

$$c_i^* = \bar{c}_i - \Phi_{k+1}^{**}, \quad c_i^{**} = \bar{c}_i + \Phi_{k+1}^{**}.$$

Возможность использования псевдокритериев — важное достоинство метода. Во-первых, это позволяет во многих случаях выбирать не произвольные, а обоснованные функциональные ограничения. Во-вторых, когда количество априорных ограничений уменьшается, увеличивается объем области G и вместе с ним возрастает величина γ , входящая в формулу (2.7).

Параметрические ограничения и псевдокритерии. Мы всегда считаем, что параметрические ограничения (2.1) жестко заданы. Однако в некоторых случаях конструкторов интересует возможность сужения основного параллелепипеда за счет уменьшения вариации каких-нибудь из параметров.

Для исследования таких вопросов можно использовать те же расчеты, описанные в пункте 2.2, если предварительно включить исследуемые параметры в число псевдокритериев.

Пусть, например, ставится вопрос: чем придется пожертвовать, если ограничить изменение α_p так, что $\alpha_p^* \leq \alpha_p \leq \alpha'_p$, где $\alpha'_p < \alpha_p^{**}$? В этом случае следует ввести псевдокритерий $\Phi_{k+1} = \alpha_p$. Введя критериальное ограничение $\Phi_{k+1}^{**} = \alpha'_p$, мы получим множество допустимых точек D' , соответствующее ограниченному изменению α_p , и сможем сравнить наилучшие пробные точки в D' с наилучшими пробными точками в D .

О таблицах испытаний. Таблицы испытаний нередко встречаются в инженерной практике. Особенность используемых нами таблиц заключается в том, что испытания равномерно распределены в области G пространства параметров. Благодаря этому таблицы позволяют получить правильное представление о распределении значений каждой из функций $\Phi_v(A)$ при $A \in G$ и гарантируют достаточно подробный просмотр любой наперед заданной части G , когда $N \rightarrow \infty$.

Если количество пробных точек N велико, то вместо просмотра всей таблицы испытаний можно ограничиться просмотром ее части, содержащей M наилучших значений ($M < N$):

$$\Phi_v(A_{i_1}) \leq \Phi_v(A_{i_2}) \leq \dots \leq \Phi_v(A_{i_M}).$$

Такую таблицу мы называем усеченной таблицей испытаний. Чрезмерное усечение таблиц может оказаться причиной пустоты множества D , но это будет обнаружено на третьем этапе диалога и тогда, возвращаясь ко второму этапу, следует увеличить объем таблиц.

Нормированные критерии. Предположим, что все рассматриваемые критерии $\Phi_v(A)$ строго положительны: $\Phi_v(A) > 0$. Обозначим наилучшее значение Φ_v в (2.5) через $\Phi_{v,N}^* = \Phi_v(A_{i_1})$. Если вместо $\Phi_v(A)$ рассматривать нормированный критерий

$$\lambda_v(A) = \Phi_v(A) / \Phi_{v,N}^*,$$

то вместо (2.5) получим таблицу испытаний вида

$$1 \leq \lambda_v(A_{i_2}) \leq \lambda_v(A_{i_3}) \leq \dots \leq \lambda_v(A_{i_N}). \quad (2.8)$$

Выбор критериальных ограничений можно осуществлять по таблицам вида (2.8), которые позволяют ориентироваться на относительные изменения значений критериев. Необходимо, однако, подчеркнуть, что такая нормировка может считаться обоснованной только тогда, когда N достаточно велико, и значение $\Phi_{v, N}^*$ достаточно близко к $b_v^* = \min_{A \in G} \Phi_v(A)$. Это же замечание относится к другим возможным способам нормировки критериев.

2.4. Пример. Оптимизация параметров редуктора¹⁾

Исходная модель. В качестве исходного был выбран реальный механизм — одноступенчатый редуктор [33]. Редуктор состоит из двух косозубых шевронных колес в подшипниках скольжения (рис. 2.5). Модель имеет 6 степеней свободы. Обобщенные координаты: x_1, x_4 — углы поворота колес I и II в направлении вращения; x_2, x_5 — перемещения колес I и II в направлении линии зацепления; x_3, x_6 — перемещения подшипников колес I и II в направлении линии зацепления. Источником возмущающих сил считается накопленная погрешность Δ колеса I с амплитудой 10 мкм.

Колебательные процессы в редукторе описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_5 r_1 y + k_5 r_1 \dot{y} &= -c_5 r_1 \Delta, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1(x_2 - x_3) + c_5 y + k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_5 \dot{y} &= -c_5 \Delta, \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_1(x_2 - x_3) + c_3 x_3 - k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 \dot{x}_3 &= 0, \\ m_4 \ddot{x}_4 - c_5 r_2 y - k_5 r_2 \dot{y} &= c_5 r_2 \Delta, \\ m_5 \ddot{x}_5 + c_2(x_5 - x_6) - c_5 y + k_2(\dot{x}_5 - \dot{x}_6) - k_5 \dot{y} &= c_5 \Delta, \\ m_6 \ddot{x}_6 - c_2(x_5 - x_6) + c_4 x_6 - k_2(\dot{x}_5 - \dot{x}_6) + k_4 \dot{x}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь r_1, r_2 — радиусы основных окружностей колес I и II; m_1, m_4 — их моменты инерции; m_2, m_5 — их массы; m_3, m_6 — массы подшипников колес I и II; c_1, c_2 — жесткости колес I и II; c_3, c_4 — жесткости стула подшипников колес I и II; c_5 — жесткость зацепления; $y = r_1 x_1 + x_2 - r_2 x_4 - x_5$; k_i — коэффициент демпфирования в соответствующей жесткости.

Численные значения всех параметров приведены в табл. 2.1. Значения k_i указаны при двух частотах f (в герцах), так как предполагается, что $\ln k_i$ есть линейная функция от f . Накопленная погрешность

¹⁾ В диалоге с ЭВМ участвовал специалист по динамике машин П. И. Зинюков.

Δ представляется в виде $\Delta = \Delta_0 \sin 2\pi ft$, где f — частота вращения колеса I — меняется в рабочем диапазоне $f_{\text{нач}} \leq f \leq f_{\text{кон}}$; предполагается, что $f_{\text{нач}} = 5$ Гц, $f_{\text{кон}} = 300$ Гц. При каждом фиксированном f установившееся решение системы (2.9) ищется в виде $x_i = a_i \sin(2\pi ft + \psi_i)$.

Таблица 2.1

Параметры исходной модели

Параметры	$i = 1$	2	3	4	5	6
m_i	2 кгм ²	300 кг	300 кг	75 кгм ²	1000 кг	300 кг
$10^9 c_i$ Н/м	0,50	0,25	0,50	0,50	3,0	—
$10^6 k_i(50) \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	0,500	0,250	0,167	0,167	0,500	—
$10^6 k_i(150) \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	0,167	0,083	0,056	0,056	0,167	—
r_i мм	91,41	355,71	—	—	—	—

По имеющимся программам на ЭВМ вычисляются амплитудно-частотные характеристики $a_i(f)$ при $1 \leq i \leq 6$, ускорения $u_i(f)$ (в децибелах) при $1 \leq i \leq 6$ и динамические усилия $P_i(f)$ в жесткостях c_i при $1 \leq i \leq 5$. Вычисляются также собственные частоты системы (2.9) при $\Delta \equiv 0$ и $k_i = 0$. В качестве варьируемых рассматриваются 11 параметров

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{11}) = (m_1, \dots, m_6, c_1, \dots, c_5).$$

Критерии качества. Редуктор был построен для виброакустических исследований. Одна из основных задач такого исследования — снижение виброактивности по различным выходным характеристикам, в различных точках механизма, на различных частотах. Естественно, что задача эта

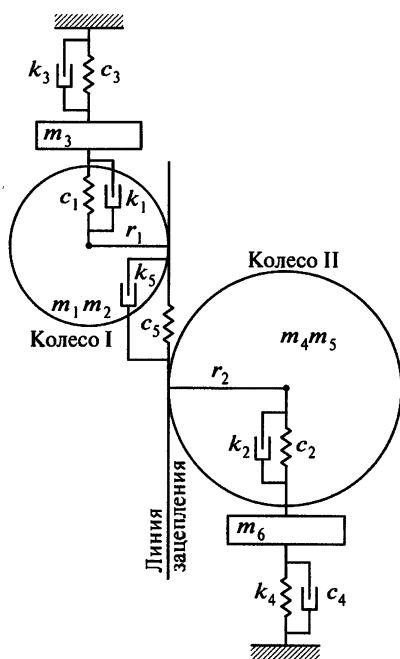


Рис. 2.5. Динамическая модель редуктора

оказалась многокритериальной. Проектировщиком были сформулированы 14 критериев Φ_v , значения которых желательно уменьшить.

Для сокращения записей введем обозначения

$$\bar{F} = \frac{1}{f_{\text{кон}} - f_{\text{нач}}} \int_{f_{\text{нач}}}^{f_{\text{кон}}} F(f) df, \quad \max F \equiv \max_{f_{\text{нач}} < f < f_{\text{кон}}} F(f).$$

Тогда нетрудно записать все критерии:

- (1) средние и максимальные значения амплитуд перемещений (в микронах) подшипников колес I и II соответственно:

$$\Phi_1 = \bar{a}_3, \quad \Phi_2 = \max a_3, \quad \Phi_3 = \bar{a}_6, \quad \Phi_4 = \max a_6;$$

- (2) средние и максимальные значения амплитуд ускорений (в децибелах) подшипников колес I и II соответственно:

$$\Phi_5 = \bar{u}_3, \quad \Phi_6 = \max u_3, \quad \Phi_7 = \bar{u}_6, \quad \Phi_8 = \max u_6;$$

- (3) средние и максимальные значения амплитуд динамических усилий (в ньютонах), передаваемых с подшипников колес I и II на фундамент:

$$\Phi_9 = \bar{P}_3, \quad \Phi_{10} = \max P_3, \quad \Phi_{11} = \bar{P}_4, \quad \Phi_{12} = \max P_4;$$

- (4) масса деталей вращения: $\Phi_{13} = m_2 + m_5$;

- (5) число собственных частот Φ_{14} , попавших в рабочий диапазон $f_{\text{нач}} \leq f \leq f_{\text{кон}}$.

Проектировщик высказал также предположение, что первые 12 критериев могут быть разбиты на тройки критериев, примерно равноценных. Первая тройка состоит из наиболее важных критериев Φ_1 , Φ_5 , Φ_9 ; вторая — из критериев Φ_2 , Φ_6 , Φ_{10} ; третья — из критериев Φ_3 , Φ_7 , Φ_{11} и, наконец, четвертая — из наименее существенных критериев Φ_4 , Φ_8 , Φ_{12} . Как мы увидим в дальнейшем (пункт 4.2), расчеты в основном подтвердили это предположение.

Составление таблиц испытаний. Допустимые пределы варьирования каждого из параметров были указаны проектировщиком так, чтобы отличие их от параметров исходной модели, приведенных в табл. 2.1, не превосходило 20—50%. Все значения α_j^* и α_j^{**} имеются в табл. 2.2; здесь же записаны координаты $\alpha_{1,j}$ точки A_1 , соответствующей исходной модели и помещенной в центр параллелепипеда П.

В параллелепипеде П было проведено 512 испытаний. Мы приводим фрагмент таблиц испытаний (табл. 2.3), содержащий лишь начало, средний участок и конец таблиц для первых семи критериев.

Значения параметров моделей

j	α_j^*	$\alpha_{1,j}$	α_j^{**}	$\alpha_{416,j}$	α_j'	$\hat{\alpha}_j$
1	1	2	3	1,042	1,00	1,00
2	150	300	450	360	360	375
3	150	300	450	247	247	242
4	50	75	100	94,6	100	100
5	650	1000	1350	720	720	700
6	200	300	400	210	200	200
7	0,40	0,50	0,60	0,459	0,459	0,440
8	0,20	0,25	0,30	0,275	0,275	0,263
9	0,40	0,50	0,60	0,588	0,600	0,600
10	0,40	0,50	0,60	0,599	0,600	0,600
11	2	3	4	3,89	4,00	4,00

Первый диалог с ЭВМ. Целью этого диалога было выяснить, существуют ли модели, не худшие, чем A_1 по всем 14 критериям. Иными словами, в качестве критериальных ограничений Φ_v^{**} были выбраны значения, соответствующие точке A_1 , т. е. $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$ при всех v .

В таблице испытаний оказалось неожиданно много таких точек — 45. Причем нетрудно было заметить, что среди этих точек много существенно различных. Вероятно, это связано с тем, что перед конструкторами редуктора не ставилась задача оптимального проектирования: нужна была лишь *достаточно хорошая* работающая модель.

Второй диалог с ЭВМ. Обычно считается очень желательным уменьшение количества резонансов в рабочей зоне. Исходя из этого, было решено сохранить все Φ_v^{**} при $1 \leq v \leq 13$ и уменьшить Φ_{14}^{**} до минимального значения $\min \Phi_{14}(A_j) = 2$, т. е. выбрать $\Phi_{14}^{**} = 2$. Количество пробных точек, удовлетворяющих новым критериальным ограничениям, сразу резко уменьшилось до четырех — A_{316} , A_{390} , A_{416} , A_{484} (табл. 2.4). Ни одна из этих точек не является наилучшей по всем четырнадцати критериям¹⁾.

¹⁾ Все четыре точки приближенно эффективны в смысле определения, приведенного в разделе 3.

Таблицы испытаний

Номер п/п	i	$\Phi_1(A_i)$	i	$\Phi_2(A_i)$	i	$\Phi_3(A_i)$	i	$\Phi_4(A_i)$	i	$\Phi_5(A_i)$	i	$\Phi_6(A_i)$	i	$\Phi_7(A_i)$
1	416	1,46	416	3,13	384	0,530	384	1,31	416	66,9	112	88,6	64	58,4
2	348	1,53	348	3,36	64	0,532	374	1,41	304	67,5	280	88,8	304	59,1
3	112	1,54	112	3,46	400	0,550	260	1,47	348	67,6	42	88,9	400	59,2
4	280	1,62	448	3,52	260	0,559	248	1,50	112	68,2	372	89,0	412	59,3
5	448	1,65	302	4,02	304	0,564	353	1,54	280	68,3	302	89,4	232	59,7
6	304	1,68	2	4,07	248	0,573	63	1,65	448	68,4	392	89,5	384	59,8
7	302	1,79	280	4,16	232	0,577	392	1,66	64	68,5	448	89,7	260	60,2
8	42	1,84	158	4,40	353	0,596	40	1,66	208	68,8	36	89,8	72	60,3
9	372	1,86	67	4,53	392	0,598	482	1,70	392	68,9	107	90,0	248	60,3
10	64	1,89	224	4,60	20	0,628	476	1,71	224	69,1	336	90,1	392	60,4
11	224	1,89	322	4,61	224	0,637	408	1,75	372	69,2	140	90,2	353	60,5
12	322	1,90	196	4,62	212	0,660	452	1,75	400	69,4	309	90,4	364	60,6
13	392	1,90	128	4,63	364	0,661	36	1,79	264	69,5	466	90,4	20	60,7
14	140	1,92	64	4,64	44	0,662	232	1,81	42	69,5	151	90,6	216	60,7
15	2	1,94	42	4,68	72	0,663	20	1,82	72	69,6	428	90,8	322	60,7
16	400	1,97	372	4,71	416	0,663	14	1,84	188	69,6	484	90,8	224	60,8
17	208	1,97	140	4,72	340	0,666	340	1,84	484	69,7	416	91,1	416	60,9
18	484	1,99	254	4,80	312	0,675	222	1,84	302	69,7	216	91,1	340	61,1
...
280	328	3,96	195	11,24	425	1,378	21	4,45	429	75,1	169	101,2	308	66,7
281	444	3,97	57	11,32	163	1,378	12	4,47	177	75,1	39	101,2	487	66,8
282	351	3,97	15	11,39	200	1,382	414	4,47	354	75,1	398	101,2	100	66,8
283	382	3,97	496	11,39	375	1,383	362	4,49	1	75,1	387	101,3	218	66,8
284	82	3,97	125	11,42	68	1,388	478	4,50	351	75,1	429	101,3	226	66,8
285	1	3,99	153	11,43	1	1,389	185	4,50	478	75,1	358	101,4	301	66,8
286	334	4,00	355	11,45	334	1,389	255	4,51	78	75,1	362	101,4	505	66,8
...
511	407	9,82	89	32,82	347	3,275	46	17,04	215	81,9	407	111,5	35	74,4
512	71	10,01	407	34,24	359	3,450	507	17,52	71	82,7	89	111,8	347	74,5

Значения $\Phi_v(A_i)$ в четырех точках

i	$v=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
316	2,55	8,07	0,714	3,22	70,6	91,1	60,7	91,6	1253	3978	426	1920	1025	2
390	3,17	9,28	0,903	2,43	72,9	93,3	63,0	89,2	1502	4415	505	1355	983	2
416	1,46	3,13	0,663	1,96	66,9	91,1	60,9	87,3	861	1850	398	1175	1080	2
484	1,99	5,43	0,740	2,30	69,7	90,8	62,0	88,7	1054	2881	420	1302	1202	2

Выбор наилучшей пробной точки. Эта, вообще говоря, сложная задача (см. раздел 3) в рассматриваемом случае решается очень просто. Сравнивая значения критериев для найденных четырех точек, легко заметить, что точка A_{416} — наилучшая по всем критериям, кроме Φ_6 , Φ_7 и Φ_{13} , причем значения $\Phi_6(A_{416})$ и $\Phi_7(A_{416})$ отличаются от наилучших всего на 0,3%. Из табл. 2.5 видно, что точка A_{416} оптимальна среди всех 512 пробных точек по критериям Φ_1 и Φ_5 из первой группы и по критерию Φ_2 из второй группы. Из табл. 2.3 видно также, что она входит в число двадцати лучших по критериям Φ_3 , Φ_6 и Φ_7 . Поэтому наилучшей пробной точкой была объявлена точка A_{416} . Значения координат этой точки приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.5

Значения критериев качества

v	$\min \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_1)$	$\max \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_{416})$	$\Phi_v(A')$	$\Phi_v(\hat{A})$
1	1,46	3,99	10,01	1,46	1,37	1,29
2	3,13	12,97	34,24	3,13	2,98	2,66
3	0,530	1,389	3,450	0,663	0,577	0,578
4	1,31	4,37	17,52	1,96	1,43	1,38
5	66,9	75,1	82,7	66,9	66,3	66,0
6	88,6	103,7	111,8	91,1	90,3	89,9
7	58,4	67,0	74,5	60,9	59,9	60,0
8	77,7	91,8	106,1	87,3	83,9	84,3
9	664	2000	5452	861	825	777
10	1502	6490	19550	1850	1796	1601
11	231	697	1735	398	352	353
12	568	2186	10035	1175	948	845
13	846	1300	1775	1080	1080	1075
14	2	3	4	2	2	2

Улучшение точки A_{416} . Сравнив координаты точки A_{416} с границами параллелепипеда Π (см. табл. 2.2), нетрудно заметить, что шесть координат близки к границам Π , а именно $\alpha_{416,1}$, $\alpha_{416,4}$, $\alpha_{416,6}$, $\alpha_{416,9}$, $\alpha_{416,10}$ и $\alpha_{416,11}$ близки к α_1^* , α_4^{**} , α_6^* , α_9^{**} , α_{10}^{**} , α_{11}^{**} . В соответствии с рекомендацией, высказанной в конце пункта 3.1, была рассчитана пробная точка A' , у которой эти шесть координат заменены граничными значениями, а остальные совпадают с координатами точки A_{416} . Из табл. 2.5 видно, что по всем критериям точка A' оказалась лучше точки A_{416} . По-видимому, минимальные значения большинства функций $\Phi_v(A)$ достигаются на границе Π .

II-поиск в окрестности A' . Точка A' была помещена в центр пятимерного параллелепипеда

$$0,95\alpha'_j \leq \alpha_j \leq 1,05\alpha'_j, \quad j = 2, 3, 5, 7, 8;$$

значения α'_1 , α'_4 , α'_6 , α'_9 , α'_{10} и α'_{11} были закреплены. Выбрав и рассчитав в этом параллелепипеде 128 пробных точек, мы убедились, что

- улучшить точку A' по всем критериям невозможно;
- значения $\Phi_v(A')$ устойчивы при малых изменениях точки A в окрестности A' ;
- среди 128 пробных точек проектировщик выделил одну (с порядковым номером 67), которую следует считать наилучшей. Эту точку мы обозначим \hat{A} ; координаты ее приведены в табл. 2.2, а значение $\Phi_v(\hat{A})$ — в табл. 2.5.

Так как численные значения $\Phi_v(\hat{A})$ сравнительно мало отличаются от $\Phi_v(A')$, на этом поиск решено было прекратить. Оптимальной точкой была объявлена точка \hat{A} . Из табл. 2.5 легко видеть, насколько улучшились значения всех критериев $\Phi_v(\hat{A})$ по сравнению со значениями $\Phi_v(A_1)$ для исходной модели.

Замечание. Из табл. 2.4 видно, что если возникнет задача об уменьшении массы редуктора, то наилучшее решение придется искать не в окрестности точки A_{416} , а в окрестности A_{390} .

После того как множество допустимых точек D определено, традиционная схема выбора оптимальных параметров весьма проста: выбирается решающий критерий качества $\Phi(A)$ и формулируется задача об отыскании точки \hat{A} такой, что

$$\Phi(\hat{A}) = \min_{A \in D} \Phi(A).$$

Координаты точки \hat{A} и будут оптимальными параметрами. Такая постановка задачи обсуждается в пункте 3.1.

Однако весьма часто конструкторы не могут или не хотят вводить один решающий критерий: по их мнению, решение о выборе параметров должно приниматься с учетом нескольких, или даже всех критериев Φ_1, \dots, Φ_k , а как сравнивать ценность различных критериев — не ясно. В этой ситуации приходится отыскивать множество возможных оптимальных точек, т. е. решать гораздо более сложную задачу. Этому посвящен пункт 3.2.

В пункте 3.3 рассмотрен важный частный случай, когда заданы два решающих критерия, противоречащих друг другу, и вместо оптимальной точки следует определить так называемую компромиссную кривую. Примеры расчета таких кривых приведены в пункте 3.4.

3.1. Один решающий критерий

Мы не будем давать рецептов, как выбирать решающий критерий $\Phi(A)$: в разных задачах это делают по-разному [68]. Приведем только несколько, как нам кажется, нестандартных соображений.

О роли $\Phi(A)$. В ходе расчета ряда задач мы обнаружили, что после определения множества D конструкторы теряли интерес к выбору функции Φ . Они утверждали, что любое решение, удовлетворяющее всем найденным в разделе 2 критериальным ограничениям, является отличным решением задачи. И в качестве оптимальной предпочитали

выбрать по своему усмотрению одну из уже найденных точек (ср. пример в пункте 2.4). Конечно, с математической точки зрения такое решение нельзя назвать оптимальным. Но именно так нередко принимают решение на практике.

О выборе $\Phi(A)$. При использовании нашей методики, когда количество рассматриваемых критериев качества не ограничивается, трудно представить себе, чтобы решающий критерий Φ не зависел ни от одного из Φ_1, \dots, Φ_k . Так как Φ учитывает какие-то реальные физические характеристики проектируемой системы, ничто не мешает нам включить их в число критериев качества. В частности, решающий критерий может либо совпадать с одним из Φ_1, \dots, Φ_k , либо зависеть от нескольких из них, так что $\Phi = F(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$.

Нетрудно понять, что в этой ситуации изучение таблиц испытаний помогает выбрать зависимость F : при этом учитываются не только предварительные указания о роли каждого критерия, но и их действительные возможности.

Пример 3.1. Иногда Φ выбирают в форме

$$\Phi = \sum_{v=1}^k c_v \Phi_v(A),$$

где все $c_v > 0$, а сумма их $c_1 + \dots + c_k = 1$. Если из таблицы испытаний видно, что в пределах D изменения значений критерия $\Phi_p(A)$ несущественны, то естественно положить в последней формуле $c_p = 0$.

О вычислении $\Phi(A_i)$. Если решающий критерий Φ есть функция от Φ_1, \dots, Φ_k , то, после выбора этой функциональной зависимости F , значения $\Phi(A_i)$ во всех пробных точках A_i , принадлежащих D , легко вычисляются по имеющимся значениям $\Phi_v(A_i)$:

$$\Phi(A_i) = F(\Phi_1(A_i), \dots, \Phi_k(A_i)).$$

Следовательно, сразу после выбора Φ , не пересчитывая всей системы, мы можем найти значения $\Phi(A_i)$.

В разделе 2 доказано, что последовательность D_N пробных точек, принадлежащих D , представляет собой начальный участок последовательности, равномерно распределенной в D . Поэтому значения $\Phi(A_i)$ в этих точках очень полезны для численного решения задачи об отыскании $\min \Phi(A)$ при $A \in D$. Можно воспользоваться любым методом локального поиска экстремумов [52, 80, 104], выбирая в качестве начальных точек поиска все точки A_i , принадлежащие D_N , или только лучшие из них. Если множество D несвязно (см. рис. 2.3), то только такой глобальный подход может гарантировать, что поиск захватит любые части множества D .

Об использовании ЛП-поиска. При расчете ряда задач мы на этой стадии использовали простейший ЛП-поиск. Несколько лучших, по мнению проектировщиков, точек из D_N помещались поочередно в центр малого параллелепипеда, в котором выбирались от 16 до 128 пробных точек. Если в какой-нибудь из этих точек, назовем ее A' , значение $\Phi(A')$ оказывалось лучше, чем значение в центре (и при этом $A' \in D$), то иногда выбирался следующий параллелепипед с центром в A' . Если какая-нибудь из координат точки A' оказывалась близко к границе Π , то размер малого параллелепипеда соответственно уменьшался.

Общих рекомендаций на этот счет мы дать не можем. Однако если наилучшая точка A' оказывается вблизи границы Π , то мы считаем, что, как правило, имеет смысл сделать дополнительный пробный расчет системы, передвинув эту точку на границу Π : наименьшие и наибольшие значения функций часто оказываются на границе.

Мы не утверждаем, что в этих условиях ЛП-поиск эффективнее других методов поиска экстремумов; просто все необходимое для его реализации (генератор пробных точек, алгоритмы просмотра и отбора) используется в расчете, описанном в разделе 2, и, следовательно, уже имеется в отлаженном состоянии.

3.2. Несколько решающих критериев

Предположим теперь, что конструктор желает сам осуществить окончательный выбор параметров системы, принимая во внимание несколько важнейших критериев, например Φ_1, \dots, Φ_m , где, естественно, $m \leq k$. В этом случае можно облегчить ему выбор, исключив из числа пробных точек, попавших в множество D , такие точки, которые заведомо не могут оказаться наилучшими.

Эффективные точки¹⁾. Пусть в n -мерном замкнутом множестве D заданы m непрерывных функций $\Phi_1(A), \dots, \Phi_m(A)$. Условимся говорить, что точка A' *безусловно лучше*, чем точка A , если

$$\Phi_\nu(A') \leq \Phi_\nu(A)$$

при всех $\nu = 1, 2, \dots, m$ и хотя бы при одном ν имеет место строгое неравенство. В этом случае можно также сказать, что точка A *безусловно хуже*, чем точка A' .

¹⁾ Эффективные точки в литературе называют также нехудшими или паретовскими (по имени В. Парето) [37, 77]. Мы сохраним название «паретовские» для обозначения образов эффективных точек в пространстве критериев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если не существует точки $A' \in D$, безусловно лучшей, чем A , то точка A называется *эффективной*; если существует точка A' , безусловно лучшая, чем A , то точка A называется *неэффективной*.

Очевидно, при окончательном выборе параметров нужно принимать во внимание только эффективные точки: неэффективная точка не может оказаться наилучшей.

Множество всех эффективных точек обозначим через E . Важнейшие свойства E сформулированы в теоремах 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. Если множество D замкнуто и все функции

$$\Phi_1(A), \dots, \Phi_m(A)$$

непрерывны, то множество эффективных точек E непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим простым свойством непрерывной функции $f(A)$, определенной на замкнутом множестве: подмножество, состоящее из всех точек A , в которых $f(A) = c$, либо пусто, либо замкнуто. В самом деле, если последовательность точек A_1, \dots, A_j, \dots , в которых $f(A_j) = c$, сходится к точке A_0 , то из непрерывности $f(A)$ следует, что $f(A_0) = c$; следовательно, точка A_0 принадлежит тому же подмножеству.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим множество $D_1 \subseteq D$, состоящее из точек A таких, что $\Phi_1(A) = \min_{A \in D} \Phi_1(A)$. Это множество непусто. Если оно состоит из одной точки A_0 , то эта точка эффективна, ибо в любой другой точке A' значение $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$. В противном случае рассмотрим множество $D_2 \subseteq D_1$, состоящее из точек A таких, что $\Phi_2(A) = \min_{A \in D_1} \Phi_2(A)$. Множество D_2 также непусто. Если оно состоит из одной точки A_0 , то эта точка эффективна (ибо в любой другой точке $A' \in D_1$ значение $\Phi_2(A') > \Phi_2(A_0)$, а в любой точке $A' \in D - D_1$ значение $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$). В противном случае рассмотрим множество $D_3 \subseteq D_2$, состоящее из точек A таких, что $\Phi_3(A) = \min_{A \in D_2} \Phi_3(A)$, и т. д.

Если на каком-то этапе множество D_s состоит из одной точки, то эта точка окажется эффективной. В противном случае мы придем к множеству D_m , состоящему из точек A таких, что

$$\Phi_m(A) = \min_{A \in D_{m-1}} \Phi_m(A).$$

Докажем, что все точки множества D_m эффективны. Пусть $A_0 \in D_m$. Точка $A' \in D - D_1$ не может быть безусловно лучше, чем A_0 , так как $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$. Точка $A' \in D_1 - D_2$ также не может быть безу-

словно лучше, чем A_0 , ибо $\Phi_2(A') > \Phi_2(A_0)$, и т. д. Наконец, точка $A' \in D_m$ не может быть безусловно лучше, чем A_0 , ввиду того, что $\Phi_v(A') = \Phi_v(A_0)$ при всех $v = 1, 2, \dots, m$.

Таким образом, непустота множества E доказана.

Пространство критериев. Рассмотрим m -мерное пространство точек с декартовыми координатами (Φ_1, \dots, Φ_m) . Каждая точка A пространства параметров отображается в точку $B = (\Phi_1(A), \dots, \Phi_m(A))$ пространства критериев. Множество всех точек B , соответствующих всевозможным $A \in D$, назовем *множеством возможных точек* \tilde{D} в пространстве критериев. Если выполнены условия теоремы 1, то множество \tilde{D} замкнуто. Если часть границы множества D определяется критериальным ограничением $\Phi_v(A) \leq \Phi_v^{**}$, то соответствующая часть границы \tilde{D} состоит из части гиперплоскости $\Phi_v = \Phi_v^{**}$.

Множество всех точек B , соответствующих всевозможным эффективным точкам $A \in E$, назовем *множеством паретовских точек* \tilde{E} .

Нетрудно доказать, что паретовские точки расположены на границе множества возможных точек \tilde{D} (рис. 3.1). Это вытекает из следующего свойства, которое часто называют *минимальным свойством* эффективных точек.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что множество E непусто, точка $A_0 \in E$ и $\Phi_v(A_0) = b_v$ при $v = 1, 2, \dots, m$. Тогда $b_v = \min \Phi_v(A)$ для каждого фиксированного v при условии, что $A \in D$ и $\Phi_\mu(A) = b_\mu$ при всех μ , отличных от v .

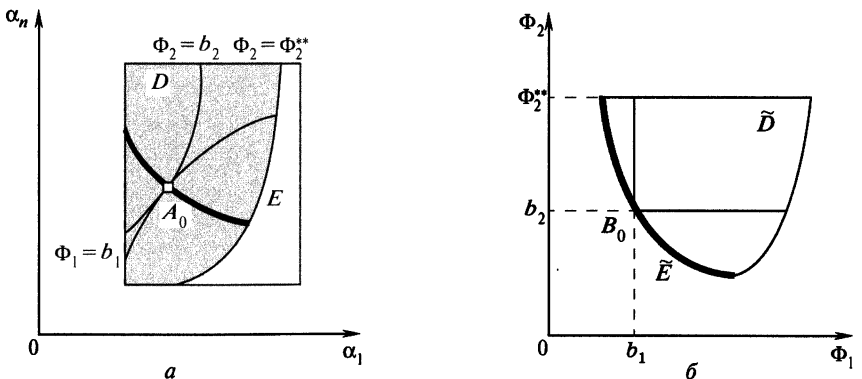


Рис. 3.1. Множество допустимых точек D и множество эффективных точек E в пространстве параметров (a) и соответствующие множества возможных точек \tilde{D} и паретовских точек \tilde{E} в пространстве критериев (b)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем для определенности $v = 1$. Теорема утверждает (см. рис. 3.1), что

$$b_1 = \min \{ \Phi_1(A) \mid \Phi_2(A) = b_2, \dots, \Phi_m(A) = b_m \} \quad (A \in D).$$

Если допустить противное, т. е. что в какой-то точке A' значение $\Phi_1(A') < b_1$ и в то же время все остальные значения

$$\Phi_2(A') = b_2, \dots, \Phi_m(A') = b_m,$$

то окажется, что точка A' безусловно лучше, чем A_0 , а это противоречит предположению об эффективности A_0 . При любом другом фиксированном v рассуждения аналогичны, так что теорема 2 доказана.

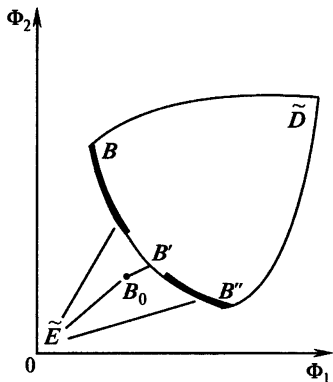


Рис. 3.2. Множество паретовских точек \tilde{E} с изолированной точкой B_0

Заметим, что доказанное минимальное свойство представляет собой *необходимый* признак эффективности точки. Из рис. 3.2 легко усмотреть, что этот признак, вообще говоря, недостаточен: не только эффективные точки обладают этим свойством.

Действительно, если и гипербола $BB'B''$, и отрезок B_0B' принадлежат изображенному на рис. 3.2 множеству возможных точек \tilde{D} , то из всех точек отрезка лишь его конец B_0 будет паретовской точкой. Однако свойством минимума (по обоим критериям) обладают все точки A , отображающиеся в отрезок B_0B' .

В общем случае размерность множества паретовских точек E равна $m - 1$. Это видно из следующего рассуждения: фиксировав произвольные возможные значения b_2, \dots, b_m , мы получим одну соответствующую им паретовскую точку (b_1, b_2, \dots, b_m) , в которой b_1 определяется как условный минимум $\Phi_1(A)$.

Приближенно эффективные точки. Предположим теперь, что в результате расчета, описанного в разделе 2, мы получили конечное множество D_N , состоящее из q пробных точек A_i , принадлежащих D , и в этих точках известны все значения $\Phi_v(A_i)$ при $v = 1, 2, \dots, m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка A_i из D_N называется *приближенно эффективной*, если не существует такой точки A_j из D_N , которая была бы безусловно лучше, чем A_i .

Множество всех приближенно эффективных точек из D_N обозначим E_N . Очевидно, все точки из D_N , которые не принадлежат E_N ,

неэффективны и неэффективность их может быть обнаружена сравнением значений $\Phi_v(A_i)$ в различных точках.

Простейший алгоритм выделения приближенно эффективных точек. Пометим какую-нибудь точку A_{i_1} из D_N . Сравнивая ее со всеми остальными точками из D_N , исключим все точки A_j , которые безусловно хуже¹⁾, чем A_{i_1} . Затем из оставшихся точек выберем помеченную точку, например A_{i_2} , и пометим ее. Сравнивая ее со всеми оставшимися точками (включая A_{i_1}), исключим те из них, которые безусловно хуже, чем A_{i_2} , и т. д. После конечного числа шагов останутся только помеченные точки. Докажем, что все оставшиеся точки приближенно эффективны.

В самом деле, пусть A_s — какая-нибудь неэффективная точка из $D_N - E_N$. Значит, существует хотя бы одна безусловно лучшая, чем A_s , точка A_j . Если точка A_j в процессе исключения уцелела, то, очевидно, точка A_s была исключена: самое позднее — на том шаге, на котором выбиралась и помечалась точка A_j . Если точка A_j сама была исключена, то на том же шаге должна была быть исключена и точка A_s (так как если A_j безусловно лучше, чем A_i , а A_i безусловно лучше, чем A_s , то A_j также безусловно лучше, чем A_s), опять же — при условии, что точка A_s не была исключена еще раньше.

Геометрическая интерпретация этого алгоритма особенно наглядна, если рассматривать изображения пробных точек в пространстве критериев (рис. 3.3): выбрав точку A_{i_1} , мы исключаем все точки A_j , образы которых попали в квадрант (в многомерном случае — гипероктант) с вершиной в точке B_{i_1} — образе точки A_{i_1} .

Используя приведенный алгоритм, нетрудно исключить из множества D_N заведомо неэффективные точки и получить множество E_N , состоящее из $q_0 \leq q$ приближенно эффективных точек. Как правило, для поиска приближенно наилучших точек конструктор может ограничиться изучением множества E_N . О возможных исключениях из этого правила сказано в замечании в конце пункта 3.3.

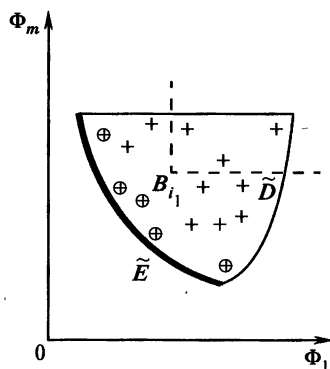


Рис. 3.3. К алгоритму исключения неэффективных точек. Приближенно-паретовские точки обведены кружками

¹⁾ То есть такие точки A_j , для которых $\Phi_v(A_i) < \Phi_v(A_j)$ при всех v и хотя бы при одном $v = v_0$ имеет место строгое неравенство.

О сходимости. В общем случае вопрос сходимости E_N к E при $N \rightarrow \infty$ достаточно сложен (пункт Д.11). Мы ограничимся здесь сравнительно простой теоремой 3, которая, тем не менее, потребует введения специального аппарата. Мы будем предполагать, что:

- (1) условия теоремы 1 выполнены;
- (2) среди точек множества E нет двух таких, в которых все критерии совпадают.

Для каждой точки A_0 из E определим *специальную ε -окрестность* $S(A_0, \varepsilon)$ как множество точек $A \in D$ таких, что при всех $v = 1, 2, \dots, m$

$$\Phi_v(A) < \Phi_v(A_0) + \varepsilon. \quad (3.1)$$

Пример такой окрестности при $m = 2$ изображен на рис. 3.4, а.

Докажем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ множества $S(A_0, \varepsilon)$ стягиваются к точке A_0 . В самом деле, очевидно $A_0 \in S(A_0, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Если допустить, что точка A' также принадлежит всем $S(A_0, \varepsilon)$, то из (3.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что $\Phi_v(A') \leq \Phi_v(A_0)$ для $v = 1, 2, \dots, m$. Так как точка A_0 эффективная, отсюда вытекает, что $\Phi_v(A') = \Phi_v(A_0)$ при всех v . Ясно, что этот вывод противоречит допущению (2).

Заметим, что если точка $A' \in D - E$, то множество $S(A', \varepsilon)$ может иметь весьма странный для «окрестности» вид (рис. 3.4, б) и при $\varepsilon \rightarrow 0$ не обязано стягиваться к A' .

Если точка $A_0 \in E$ представляет собой внутреннюю точку множества D , то можно построить шар с центром в A_0 столь малого радиуса, чтобы в этом шаре $|\Phi_v(A) - \Phi_v(A_0)| < \varepsilon$ при всех v . Тогда весь этот шар

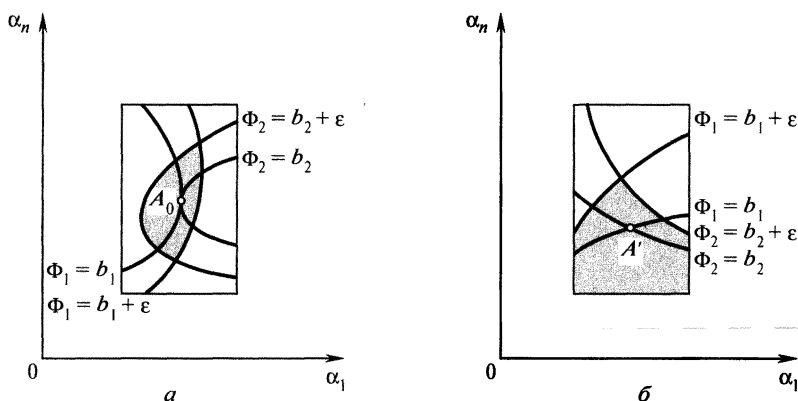


Рис. 3.4. Специальная ε -окрестность эффективной точки (а) и неэффективной точки (б)

принадлежит $S(A_0, \varepsilon)$ и n -мерный объем специальной ε -окрестности положителен.

Если точка $A_0 \in E$ представляет собой граничную точку множества D и в любой ее окрестности имеются внутренние точки D , то аналогичные рассуждения показывают, что объем $S(A_0, \varepsilon)$ также будет положительным. Следовательно, если множество D совпадает с замыканием множества своих внутренних точек (как это предполагалось в разделе 2), то для любой точки $A_0 \in E$ объем $S(A_0, \varepsilon)$ положителен.

Напротив, если $A_0 \in E$ — изолированная точка множества D , то при всех достаточно малых ε множество $S(A_0, \varepsilon)$ содержит лишь одну точку A_0 и объем $S(A_0, \varepsilon)$ равен нулю. Так что, если не делать предположения о совпадении D с замыканием множества его внутренних точек, то положительность объема специальной окрестности $S(A_0, \varepsilon)$ следует оговаривать особо.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что выполнены требования (1) и (2). Выберем любые точки A_1^0, \dots, A_s^0 из E с окрестностями положительного объема $S(A_1^0, \varepsilon), \dots, S(A_s^0, \varepsilon)$. Можно указать N_0 такое, что когда количество пробных точек N превосходит N_0 , в каждой из этих окрестностей найдется хотя бы по одной точке из E_N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность пробных точек равномерно распределена в G , можно выбрать N_0 столь большим, чтобы в каждую из s фиксированных окрестностей попала хотя бы одна пробная точка. Тогда в каждой $S(A_j^0, \varepsilon)$ найдется хотя бы одна точка A_j из D_{N_0} .

Если эта точка приближенно эффективна, то она и будет искомой точкой из E_{N_0} . В противном случае должна существовать другая приближенно эффективная точка $A_{i_k} \in D_{N_0}$, безусловно лучшая, чем A_j . Но в этом случае $\Phi_v(A_{i_k}) \leq \Phi_v(A_j)$, и точка A_{i_k} также принадлежит $S(A_j^0, \varepsilon)$.

Следовательно, в каждой окрестности $S(A_j^0, \varepsilon)$ найдется приближенно эффективная точка из D_{N_0} , т. е. точка из E_{N_0} .

При дальнейшем увеличении N приближенно эффективная точка A_j может перестать быть таковой, но только в том случае, когда появится новая приближенно эффективная точка, безусловно лучшая, чем A_j . Вышеприведенное рассуждение показывает, что эта новая

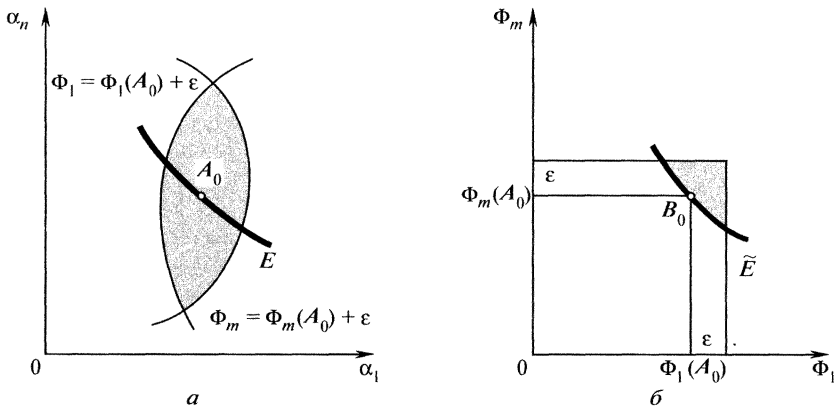


Рис. 3.5. Специальная ε -окрестность в пространстве параметров (а) и ее образ в пространстве критериев (б)

точка принадлежит той же специальной ε -окрестности $S(A_j^0, \varepsilon)$, что и точка A_j . Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. В пространстве критериев специальной ε -окрестности $S(A_0, \varepsilon)$ эффективной точки A_0 соответствует односторонняя пирамидальная окрестность паретовской точки $B_0 = (\Phi_1(A_0), \dots, \Phi_m(A_0))$. На рис. 3.5 обе эти окрестности затемнены.

3.3. Компромиссная кривая

Особый интерес для практики представляет частный случай, когда заданы два решающих критерия, $m = 2$. В этом случае множество паретовских точек представляет собой, вообще говоря, одномерное многообразие на плоскости и допускает удобное графическое представление.

Компромиссная кривая. Множество паретовских точек в двумерном пространстве критериев называют *компромиссной кривой*. Хотя, строго говоря, это не всегда кривая: она может состоять из несвязных кусков и содержать изолированные точки (рис. 3.6).

Легко, однако, доказать, что компромиссная кривая строго монотонно убывает в следующем смысле. Пусть B и B' — произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой. Обозначим их координаты $B = (b_1, b_2)$, $B' = (b'_1, b'_2)$. Тогда если

$$b_1 < b'_1, \tag{3.2}$$

то

$$b_2 > b'_2. \tag{3.3}$$

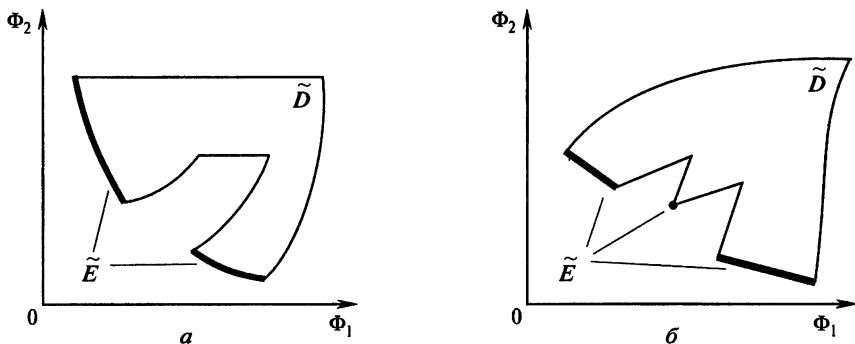


Рис. 3.6. Компромиссные кривые с разрывом (а) и с изолированной точкой (б)

В самом деле, если бы оказалось, что $b_1 < b'_1$ и $b_2 \leq b'_2$, то прообраз точки B' был бы безусловно хуже, чем прообраз точки B , и не мог бы принадлежать множеству эффективных точек E .

Вследствие неравенств (3.2), (3.3) можно сказать, что компромиссная кривая не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков, и уравнение ее может быть представлено и в форме $\Phi_2 = u(\Phi_1)$, и в форме $\Phi_1 = v(\Phi_2)$.

Приближенная компромиссная кривая. Алгоритм, приведенный в предыдущем пункте, позволяет среди q пробных точек D_N отобрать конечное число q_0 приближенно эффективных точек, составляющих множество E_N .

Назовем *приближенно паретовской точкой* образ приближенно эффективной точки в пространстве критериев. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, легко доказать, что если $B = (b_1, b_2)$ и $B' = (b'_1, b'_2)$ — две приближенно паретовские точки, то справедливо свойство, выраженное неравенствами (3.2), (3.3).

Легко также проверить, что если $B' \neq B$, то $b_1 \neq b'_1$ и $b_2 \neq b'_2$ (ибо, в противном случае, один из прообразов точек B и B' был бы безусловно хуже другого и не мог бы быть приближенно эффективной точкой). Следовательно, все приближенно паретовские точки можно упорядочить по возрастанию абсцисс или, что то же, по убыванию ординат.

Приближенной компромиссной кривой называется ломаная, соединяющая по порядку все приближенно паретовские точки (рис. 3.7).

Из вышесказанного следует, что приближенная компромиссная кривая строго монотонно убывает и уравнение ее может быть записано как в форме $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$, так и в форме $\Phi_1 = v_N(\Phi_2)$. Мы докажем,

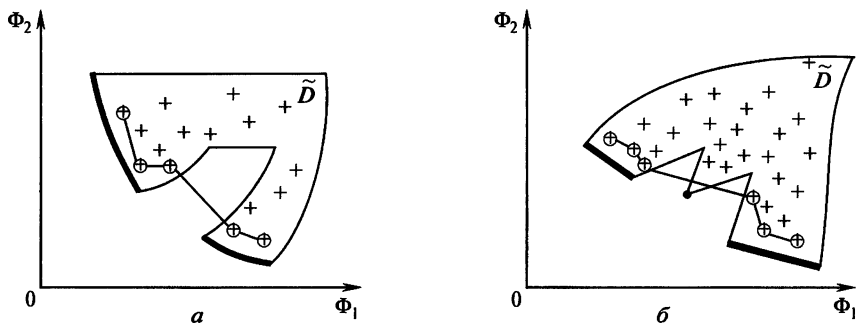


Рис. 3.7. Пробные точки и приближенные компромиссные кривые, соответствующие рис. 3.6.

Приблизленно паретовские точки обведены кружками

что если количество пробных точек N возрастает, то приближенная компромиссная кривая в некотором смысле приближается к точной компромиссной кривой.

ТЕОРЕМА 4. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ. Предположим, что множество D замкнуто и функции $\Phi_1(A)$ и $\Phi_2(A)$ непрерывны. Предположим, что множество E или какая-то его часть, состоящая из точек со специальными окрестностями положительного объема, взаимно-однозначно отображается на простую дугу компромиссной кривой. Пусть $B = (b_1, b_2)$ — произвольная точка, расположенная внутри этой дуги. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(b_1) = b_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} v_N(b_2) = b_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать только первое утверждение теоремы, так как второе доказывается в точности так же.

Сперва докажем, что приближенная компромиссная кривая $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$ определена для фиксированного нами значения b_1 при всех $N \geq N_0$. Обозначим

$$b_1^* = \min_{A \in D} \Phi_1(A), \quad b_2^* = \min_{A \in D} \Phi_2(A)$$

и пусть приближенные значения минимумов равны

$$\Phi_{1,N}^* = \min_{A \in D_N} \Phi_1(A), \quad \Phi_{2,N}^* = \min_{A \in D_N} \Phi_2(A).$$

При $N \rightarrow \infty$, как следует из раздела 1, $\Phi_{1,N}^* \rightarrow b_1^*$, $\Phi_{2,N}^* \rightarrow b_2^*$. Следовательно, при увеличении N среди точек последовательности D_N найдутся точки со значениями Φ_1 , как угодно близкими к b_1^* , и со значениями

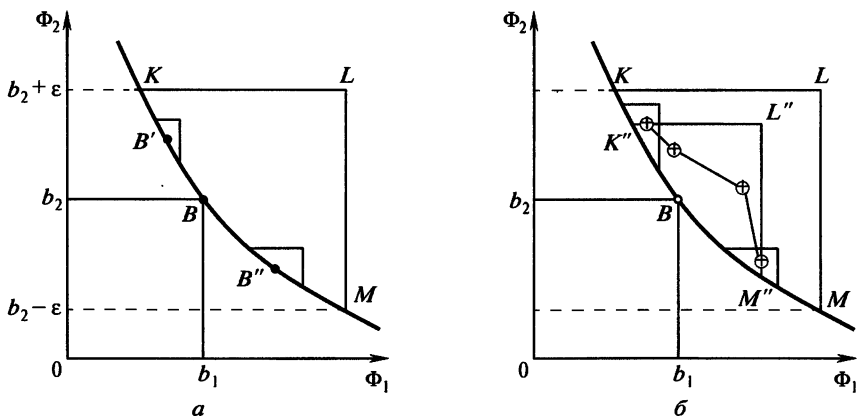


Рис. 3.8. К доказательству теоремы 4

Φ_2 , как угодно близкими к b_2^* . Легко видеть, что точки множества D_N с минимальными значениями Φ_1 или Φ_2 приближенно эффективны и принадлежат E_N . Поэтому при $N \geq N_0$ среди точек E_N найдутся точки A_i и A_j со значениями, удовлетворяющими неравенствам

$$b_1^* \leq \Phi_1(A_i) < b_1, \quad b_2^* \leq \Phi_2(A_j) < b_2.$$

Так как точка B паретовская, то $\Phi_1(A_j) > b_1$; при этом отрезок существования приближенной компромиссной кривой $\Phi_1(A_i) \leq \Phi_1 \leq \Phi_1(A_j)$ накроем значение b_1 .

Выберем теперь сколь угодно малое число $\epsilon > 0$ и докажем, что при всех $N \geq N_1 \geq N_0$

$$|u_N(b_1) - b_2| < \epsilon.$$

Для доказательства проведем на плоскости критериев (рис. 3.8, а) прямые $\Phi_2 = b_2 - \epsilon$ и $\Phi_2 = b_2 + \epsilon$ и построим криволинейный треугольник KLM . В пределах полосы $|\Phi_2 - b_2| < \epsilon$ выше и ниже точки B выберем на дуге точки B' и B'' , и пусть A' и A'' — их прообразы в множестве E .

Фиксируем $\delta > 0$ так, чтобы специальные окрестности $S(A', \delta)$ и $S(A'', \delta)$ отображались внутрь KLM . Согласно теореме 3 можно указать N_1 такое, что при всех $N \geq N_1$ в каждой из этих двух окрестностей найдется хотя бы по одной точке из E_N . Соответствующие этим точкам приближенно паретовские точки попадут в треугольные окрестности точек B' и B'' (рис. 3.8, б). Как бы ни располагались соседние с точкой B приближенно паретовские точки, они не могут выйти за пределы

криволинейного треугольника $K'L'M'$, расположенного внутри KLM . Следовательно,

$$b_2 - \varepsilon < u_N(b_1) < b_2 + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Изучение приближенной компромиссной кривой. Приближенная компромиссная кривая — ломаная и поэтому всегда непрерывна. Если точная компромиссная кривая имеет разрывы, то при увеличении количества пробных точек можно обнаружить участки приближенной кривой, которые стремятся к вертикальным отрезкам, и приближенно оценить эти разрывы.

Несколько сложнее выделить участки, на которых компромиссная кривая не определена: для этого одних приближенно паретовских точек недостаточно (см. рис. 3.7, а). Лишь нанеся на график образы всех пробных точек, можно получить представление о форме области возможных значений \tilde{D} и догадаться, что на каком-то участке компромиссная кривая не существует.

Обнаружить нашим методом изолированную точку компромиссной кривой, как правило, нельзя, хотя изучение расположения всех точек и в этом случае позволяет иногда догадаться, что, возможно, такая изолированная точка и существует (рис. 3.7, б).

Впрочем, на практике обычно используют не участки приближенной компромиссной кривой, а лишь полученные приближенно паретовские точки, которым всегда отвечают реальные приближенно эффективные варианты системы.

Замечание. Пример, изображенный на рис. 3.7, б, показывает также, что в некоторых задачах непаретовские точки (например, точки, расположенные в окрестности изолированной паретовской точки) могут представлять определенный интерес для конструкторов. Наша рекомендация: если в интересующей конструкторов зоне приближенно эффективных точек нет (или их мало), то следует проанализировать лучшие из неэффективных точек в этой зоне.

3.4. Примеры расчета приближенных компромиссных кривых

В этом разделе рассмотрены две простые задачи, в которых компромиссные кривые могут быть найдены аналитически; рассчитанные приближенные компромиссные кривые сравниваются с точными.

Аналитический подход [115]. Если функции $\Phi_1(A)$ и $\Phi_2(A)$ дифференцируемые, то можно попытаться найти геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня $\Phi_1(A) = b_1$ и $\Phi_2(A) = b_2$. В таких точках

$$\text{grad } \Phi_1 = -\lambda \text{ grad } \Phi_2.$$

Последнее векторное уравнение равносильно n скалярным алгебраическим уравнениям

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_j} = -\lambda \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

которые, вообще говоря, определяют кривую в пространстве параметров:

$$\alpha_1 = \varphi_1(\lambda), \dots, \alpha_n = \varphi_n(\lambda).$$

Если участок этой кривой, на котором $\lambda \geq 0$, принадлежит множеству D , то он принадлежит и множеству E . Например, на рис. 3.9, который соответствует приведенному ниже примеру 3.1, дуга AA' состоит из эффективных точек, а дуга $A'A''$ — из точек соприкосновения, не являющихся эффективными точками, хотя обе эти дуги описываются одним уравнением

$$\alpha_2 = 4\alpha_1 / (3\alpha_1 - 1).$$

Участок компромиссной кривой в этом случае определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)), \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Вдоль этой кривой

$$d\Phi_1 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_j} \right) da_j = -\lambda \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_j} \right) da_j = -\lambda d\Phi_2,$$

откуда для наклона компромиссной кривой получается выражение $d\Phi_2/d\Phi_1 = -1/\lambda$.

Пример 3.2. В квадрате $D = \{-1 \leq \alpha_1 \leq 1, -1 \leq \alpha_2 \leq 1\}$ заданы два критерия

$$\Phi_1 = 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \Phi_2 = (\alpha_1 + 1)^2 + (\alpha_2 - 1)^2,$$

которые желательно минимизировать.

Абсолютные минимумы функций Φ_1 и Φ_2 реализуются соответственно в точках $(0, 0)$ и $(-1, 1)$, принадлежащих D . Поэтому линия E должна соединять эти точки. Вышеуказанным аналитическим методом получаем участок AA' гиперболы $\alpha_2 = 4\alpha_1 / (3\alpha_1 - 1)^{-1}$, изображенный на рис. 3.10, а. Часть D , расположенная правее линии $AA'A''$, отображается на плоскости критериев в криволинейную фигуру $BB'B''B'''B_{\text{пр}}$, а часть D , расположенная левее линии $AA'A''$, отображается в фигуру $BB'B''B_{\text{лев}}$; таким образом, точки средней части множества \tilde{D} имеют в D по два прообраза. Компромиссная кривая — это линия BB' (рис. 3.10, б).

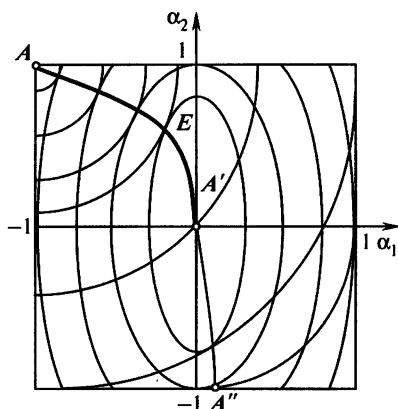


Рис. 3.9. Линии уровня $\Phi_1 = \text{const}$ и $\Phi_2 = \text{const}$, множество точек соприкосновения $AA'A''$, множество эффективных точек — дуга AA'

Результаты расчета этой задачи приведены на рис. 3.11 и рис. 3.12. На первом из них построена точная компромиссная кривая $\Phi_2 = u(\Phi_1)$ и приближенная линия $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$. При $N = 511$ точная и приближенная компромиссные кривые совпадают с точностью до 0,01. На рис. 3.12 построены все пробные точки в D и в \tilde{D} . На этом рисунке за-

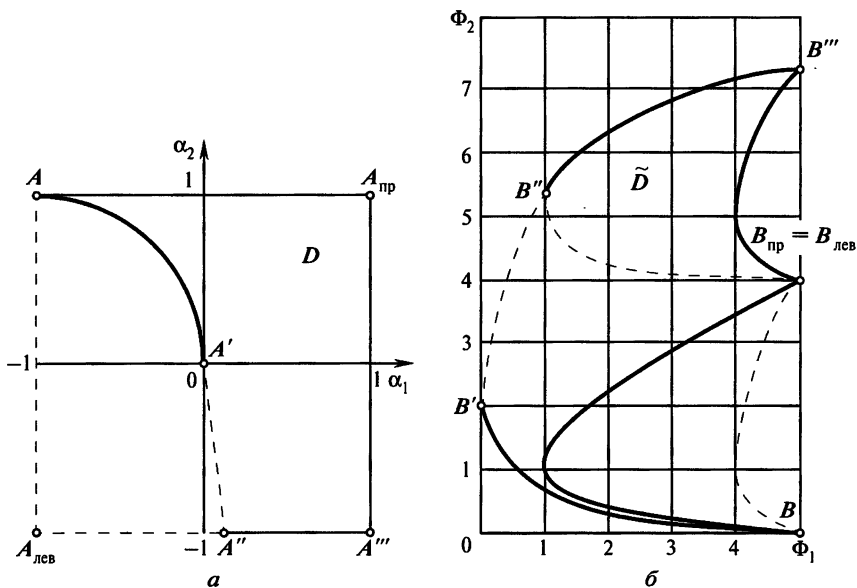


Рис. 3.10. Множество допустимых точек D в пространстве параметров (a) и множество возможных точек \tilde{D} в пространстве критериев (b).

Множество E — дуга AA' , множество \tilde{E} — дуга BB'

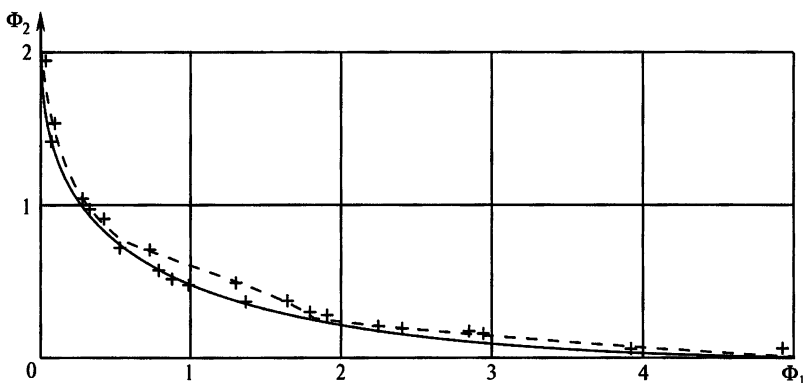


Рис. 3.11. Точная и приближенная (пунктир) компромиссные кривые при $N = 63$. Крестики — приближенно паретовские точки при $N = 255$

метна повышенная плотность точек в средней части \tilde{D} . Видно также, что \tilde{E}_N приближается к \tilde{E} быстрее, чем E_N к E .

Пример 3.3. В квадрате $\Pi = \{-0,5 \leq \alpha_1 \leq 0,5, 0 \leq \alpha_2 \leq 1\}$ заданы два критерия

$$\Phi_1 = \alpha_1^2 + 4\alpha_2^2, \quad \Phi_2 = (\alpha_1 + 1)^2 + (\alpha_2 - 1)^2,$$

которые желательно минимизировать с учетом функционального ограничения $|\alpha_2 - \alpha_1 - 0,375| \geq 0,125$.

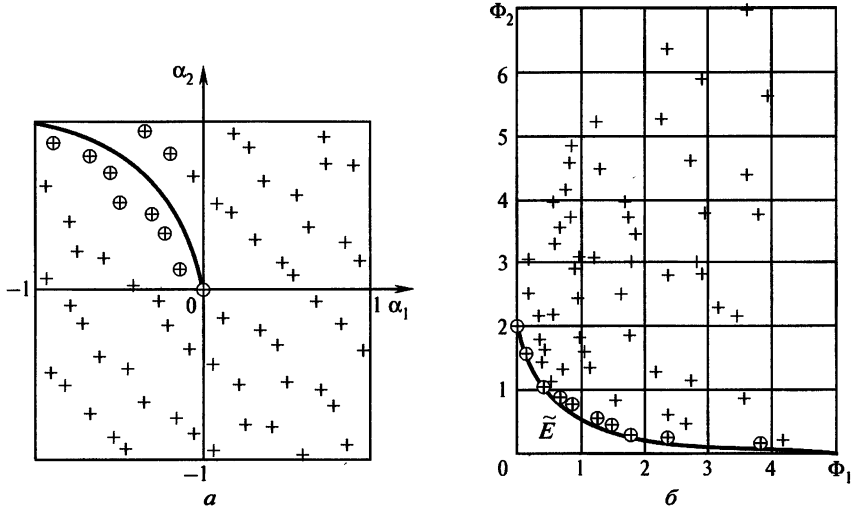


Рис. 3.12. Пробные точки в D (а) и в \tilde{D} (б) при $N = 63$.

Приблизительно эффективные и приближенно паретовские точки обведены кружками

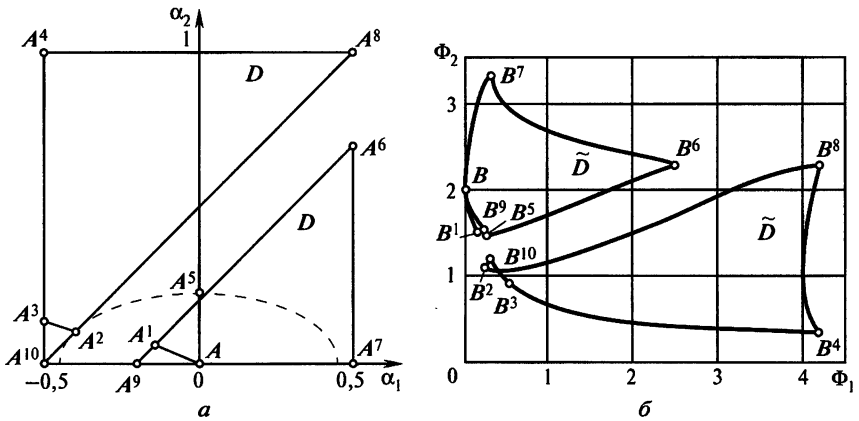


Рис. 3.13. Множество допустимых точек D в пространстве параметров (а) и множество возможных точек \tilde{D} в пространстве критериев (б).

Множество E состоит из дуг AA^1A^5 и $A^2A^3A^4$, множество \tilde{E} — из дуг BB^1B^5 и $B^2B^3B^4$

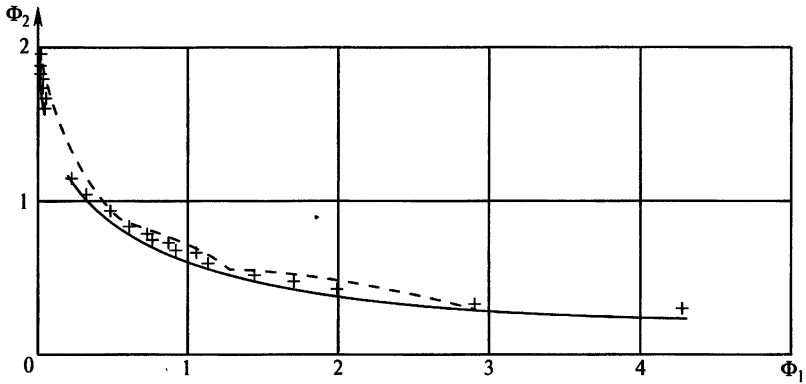


Рис. 3.14. Точная и приближенная (пунктир) компромиссные кривые при $N = 63$. Крестики — приближенно паретовские точки при $N = 255$

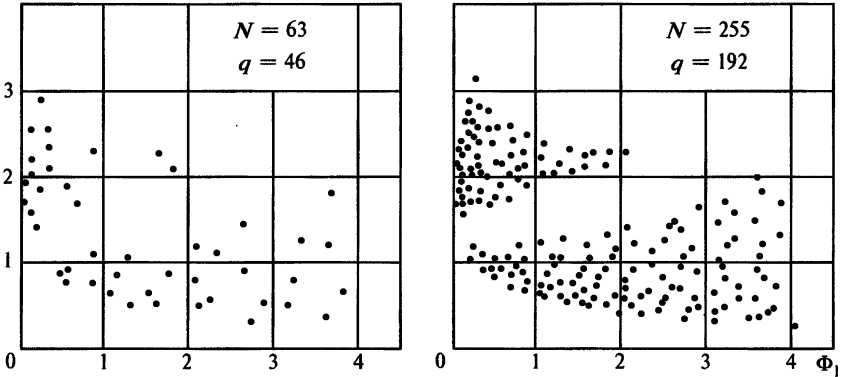


Рис. 3.15. Все q пробных точек в пространстве критериев при $N = 63$ и при $N = 255$

Множество D в этой задаче представляет собой квадрат Π с вырезанной полосой (рис. 3.13). Множество E состоит из двух участков AA^1 и A^2A^3 гиперболы $\alpha_2 = -\alpha_1(3\alpha_1 + 4)^{-1}$, из отрезка A^3A^4 границы $\alpha_1 = -0,5$ и из отрезка A^1A^5 границы $\alpha_2 - \alpha_1 = 0,25$. Здесь же изображена область \tilde{D} на плоскости критериев. Однако части \tilde{D} , состоящие из точек, имеющих по два прообраза в D , в этом примере гораздо меньше, чем в примере 3.2.

Точная компромиссная кривая изображена на рис. 3.14. На рис. 3.15 построены пробные точки в \tilde{D} . По картине, полученной при $N = 63$, нельзя с уверенностью сказать, что множество \tilde{D} состоит из двух отдельных частей; но из картины, полученной при $N = 255$, это уже вполне ясно.

4

Другие возможности метода исследования пространства параметров

В этом разделе рассмотрены некоторые вопросы, которые можно решать, используя изложенный выше метод. В пункте 4.1 приведен автоматизированный вариант диалогового алгоритма, хотя мы считаем, что на этой стадии исключать вмешательство проектировщиков нецелесообразно. В пункте 4.2 изложен метод изучения зависимости критериев, а в пункте 4.3 речь пойдет о возможностях изменения постановки задачи с целью улучшения характеристик оптимального решения.

4.1. Автоматизированный вариант диалога

Алгоритм, изложенный в пункте 2.2, можно полностью автоматизировать так, чтобы критериальные ограничения выбирались без вмешательства человека.

Простейший вариант. Фиксируем произвольное целое число $M > 1$. Первый этап диалогового алгоритма оставим без изменений. На втором этапе для каждого критерия Φ_v вычисляется шаг

$$h_v = \frac{1}{M} [\Phi_v(A_{i_n}) - \Phi_v(A_{i_1})],$$

где $\Phi_v(A_{i_1})$ и $\Phi_v(A_{i_n})$ — наименьшее и наибольшее значения $\Phi_v(A_i)$, или, иными словами, наибольший и наименьший элементы v -й строки матрицы $\|\Phi_v(A_i)\|$. В качестве критериальных ограничений выбираем значения

$$\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_{i_1}) + h_v. \quad (4.1)$$

Если на третьем этапе множество D окажется пустым, то возвращаемся ко второму этапу и увеличиваем все критериальные ограничения

$$\Phi_v^{**}|_{\text{новое}} = \Phi_v^{**}|_{\text{старое}} + h_v.$$

Очевидно, при таком повторении второго и третьего этапов потребуется не более M повторений, и множество допустимых точек D окажется непустым.

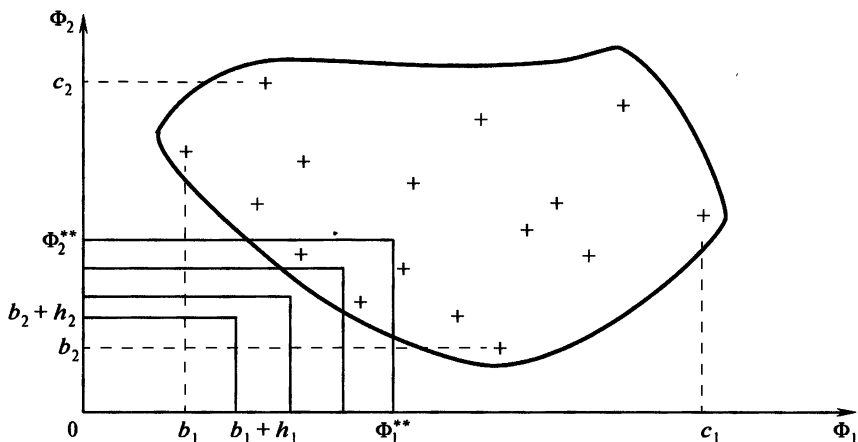


Рис. 4.1. Автоматический выбор критериальных ограничений: процесс заканчивается на 4-м шаге

Геометрическая интерпретация этого алгоритма в пространстве критериев при $b_v = \min_i \Phi_v(A_i)$, $c_v = \max_i \Phi_v(A_i)$ дана на рис. 4.1.

Недостатки такого варианта довольно очевидны: количество шагов по всем критериям одинаково, все критериальные ограничения увеличиваются одновременно, хотя среди критериев есть более существенные и менее существенные. Можно пытаться устранить эти недостатки, вводя приоритеты критериев, различные шаги для различных критериев, прибавление некоторых h_v не при каждом повторении второго этапа. Однако все такие заранее задаваемые тактики, по нашему убеждению, гораздо менее эффективны, чем рекомендации специалистов, основанные на изучении таблиц испытаний.

Кроме того, полная автоматизация диалога может привести к неоправданному сужению множества допустимых точек D , что также весьма нежелательно. Поясним эту ситуацию. Допустим, что при первой же проверке критериальных ограничений (4.1) множество D оказалось непустым и в него попала одна точка A_{i_0} . Процесс выбора критериальных ограничений на этом сразу закончится. Хотя вполне возможно, что среди точек A_i , не удовлетворяющих ограничениям (4.1), есть такие, в которых значения $\Phi_v(A_i)$ при некоторых v вполне приемлемы, а при других (более существенных) — значительно лучше, чем $\Phi_v(A_{i_0})$.

Сопоставление с другими методами. Автоматизированный вариант нашего метода имеет некоторое сходство с методом последовательных уступок [23] и с методом ограничений [10]. Но сходство это

скорее внешнее. Не вдаваясь в подробности упомянутых методов [78], заметим, что в каждом из них приходится многократно решать задачи на отыскание экстремумов каждой из функций $\Phi_\nu(A)$ при различных ограничениях. В нашем методе минимумы и максимумы всех функций $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$ в G оцениваются приближенно по одному и тому же набору пробных точек A_i . Ясно, конечно, что совсем не обязательно знать точное значение минимума $\Phi_\nu(A)$ для того, чтобы выбрать ограничение сверху Φ_ν^* .

4.2. Исследование взаимозависимости критериев

Мы уже отмечали, что при нашем методе выбора критериальных ограничений и определения множества допустимых точек (раздел 2) число критериев качества может быть произвольным. Конструктор может указать любые критерии, не заботясь об их независимости. Лишние критерии не мешают выбору критериальных ограничений.

Однако выделение важнейших критериев представляет интерес при построении различных аналитических методов приближенного изучения исследуемой системы. Оказывается, матрица $\|\Phi_\nu(A_i)\|$ позволяет сравнительно просто оценить степень линейной зависимости между любыми двумя критериями. Для этого можно использовать хорошо известное свойство коэффициента корреляции случайных величин.

Коэффициент корреляции — мера линейной зависимости случайных величин. Предположим, что η и ξ — произвольные случайные величины, у которых существуют конечные математические ожидания $M\eta$ и $M\xi$ и дисперсии¹⁾ $D\eta > 0$ и $D\xi > 0$. Тогда существует коэффициент корреляции этих величин

$$r(\eta, \xi) = \frac{M\eta\xi - M\eta M\xi}{\sqrt{D\eta D\xi}}. \quad (4.2)$$

Как известно, $r(\xi, \eta) = r(\eta, \xi)$ и $-1 \leq r(\eta, \xi) \leq 1$. Если η и ξ независимы, то $r(\eta, \xi) = 0$.

Мы воспользуемся следующим свойством коэффициента корреляции, которое можно найти в большинстве курсов теории вероятностей: условие $|r(\eta, \xi)| = 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовали постоянные $c_0 \neq 0$ и c_1 такие, что с вероятностью 1

$$\xi = c_0\eta + c_1. \quad (4.3)$$

Случай $c_0 > 0$ соответствует условию $r(\eta, \xi) = 1$, а случай $c_0 < 0$ — условию $r(\eta, \xi) = -1$.

¹⁾ Напомним, что $D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$.

Корреляция критериев. Пусть Γ — случайная точка, равномерно распределенная в G , так что плотность вероятностей ее в G постоянна: $p(A) = 1/V_G$. Каждому критерию $\Phi_\nu(A)$ поставим в соответствие случайную величину $\xi_\nu = \Phi_\nu(\Gamma)$, определенную в G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициентом корреляции критериев $\Phi_\mu(A)$ и $\Phi_\nu(A)$ в области G назовем число

$$r_{\mu\nu} = r(\xi_\mu, \xi_\nu).$$

Если функции $\Phi_\mu(A)$ и $\Phi_\nu(A)$ кусочно-непрерывны и отличны от постоянных, то все условия существования $r_{\mu\nu}$ выполнены. Тогда вышеприведенное свойство коэффициента корреляции $r(\eta, \xi)$ может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Условие $|r_{\mu\nu}| = 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовали такие постоянные $c_0 \neq 0$ и c_1 , что во всех точках A , в которых $\Phi_\mu(A)$ и $\Phi_\nu(A)$ непрерывны, выполняется равенство

$$\Phi_\mu(A) = c_0 \Phi_\nu(A) + c_1. \quad (4.4)$$

Случай $c_0 > 0$ соответствует условию $r_{\mu\nu} = 1$, а случай $c_0 < 0$ — условию $r_{\mu\nu} = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|r_{\mu\nu}| = 1$, то, переводя утверждение (4.3) с языка теории вероятностей на язык теории функций, можно сказать, что соотношение (4.4) имеет место почти всюду в G . Пусть A' — точка непрерывности $\Phi_\mu(A)$ и $\Phi_\nu(A)$. В любой окрестности точки A' найдутся точки A , в которых справедливо (4.4). Выбрав последовательность таких точек, сходящуюся к A' , мы, используя определение непрерывности функций, получим, что (4.4) справедливо также в точке A' .

Легко видеть, что обратное утверждение не требует доказательства: если (4.4) имеет место во всех точках непрерывности Φ_μ и Φ_ν , то тем самым (4.4) имеет место почти всюду в G . Впрочем, равенство $|r_{\mu\nu}| = 1$ легко проверить непосредственно, исходя из (4.4), так как

$$M\xi_\mu = c_0 M\xi_\nu + c_1, \quad M\xi_\mu \xi_\nu - M\xi_\mu M\xi_\nu = c_0 D\xi_\nu,$$

то из (4.2) сразу следует, что $r_{\mu\nu} = c_0/|c_0|$ и $|r_{\mu\nu}| = 1$.

Итак, если $r_{\mu\nu}$ близко к 1, скажем, $r_{\mu\nu} \geq 0,9$, то можно считать, что между функциями $\Phi_\mu(A)$ и $\Phi_\nu(A)$ в области G существует зависимость, близкая к линейной, и один из этих критериев можно из рассмотрения исключить¹⁾.

¹⁾ Исключение критерия не должно носить формального характера. Если критерий важный, то его не следует вычеркивать и необходимо учитывать в процедуре принятия решения (при анализе Парето-оптимальных решений).

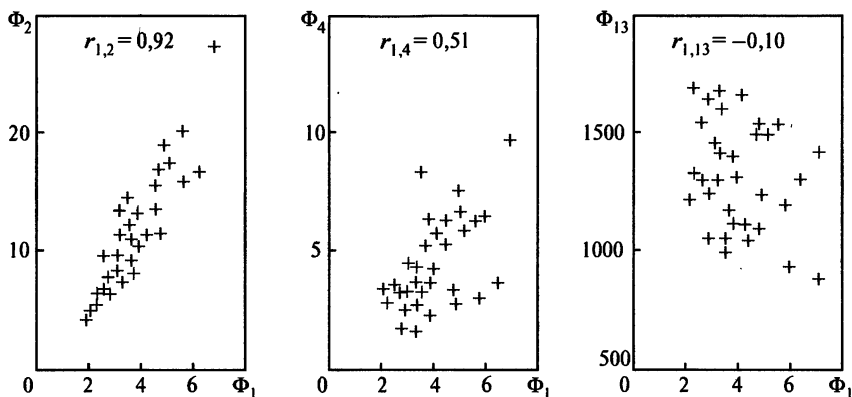


Рис. 4.2. Пробные точки в плоскости критериев (Φ_1, Φ_2) , (Φ_1, Φ_4) , (Φ_1, Φ_{13}) и соответствующие значения коэффициентов корреляции критериев

Случай близости $r_{\mu\nu}$ к -1 практически нереален, так как это означало бы, что в числе критериев, которые желательно минимизировать, фигурируют и величина Φ_ν , и величина $-\Phi_\nu$, равносильная $-|c_0|\Phi_\nu + c_1$.

Другие значения $r_{\mu\nu}$ не позволяют делать столь решительных выводов о характере зависимости между критериями Φ_μ и Φ_ν .

Рис. 4.2 соответствует рассмотренному в пункте 2.4 примеру оптимизации параметров редуктора. Здесь построены 32 пробные точки в плоскости критериев (Φ_μ, Φ_ν) при $r_{\mu\nu}$, равных соответственно 0,92, 0,51 и $-0,10$. Легко видеть, что в первом случае наилучшая точка для обоих критериев Φ_1 и Φ_2 одна и та же, а во втором и третьем случаях имеются четыре приблизительно паретовские точки.

Вычисление $r_{\mu\nu}$. Введем в рассмотрение интегралы вида

$$I_\mu = \frac{1}{V_G} \int_G \Phi_\mu(A) dA, \quad I_{\mu\nu} = \frac{1}{V_G} \int_G \Phi_\mu(A) \Phi_\nu(A) dA.$$

Все величины, входящие в определение (4.2) коэффициента корреляции $r(\xi_\mu, \xi_\nu)$, легко выражаются через интегралы

$$\begin{aligned} M\xi_\mu &= \int_G \Phi_\mu(A) p(A) dA = I_\mu, \\ M\xi_\mu \xi_\nu &= \int_G \Phi_\mu(A) \Phi_\nu(A) p(A) dA = I_{\mu\nu}, \\ M\xi_\mu^2 &= \int_G \Phi_\mu^2(A) p(A) dA = I_{\mu\mu}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, можно записать новую формулу для $r_{\mu\nu}$, в которую входят только интегралы по G и не входят математические ожидания:

$$r_{\mu\nu} = \frac{I_{\mu\nu} - I_{\mu}I_{\nu}}{\sqrt{(I_{\mu\mu} - I_{\mu}^2)(I_{\nu\nu} - I_{\nu}^2)}}. \quad (4.5)$$

Так как последовательность пробных точек A_i равномерно распределена в G (в смысле пункта 1.1), то из теоремы 8 Дополнения следует, что все такие интегралы являются пределами:

$$I_{\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i),$$

$$I_{\mu\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i)\Phi_{\nu}(A_i).$$

Поэтому при достаточно больших N можно считать, что

$$I_{\mu} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i), \quad I_{\mu\nu} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i)\Phi_{\nu}(A_i). \quad (4.6)$$

Все величины, входящие в эти формулы, имеются в матрице $\|\Phi_{\mu}(A_i)\|$. Чтобы убедиться в том, что N достаточно велико, можно сравнить приближенные значения $r_{\mu\nu}$, полученные при нескольких значениях N , например при $N = 64, 128, 256$.

Выделение зависимых критериев. Процесс выделения зависимых критериев может быть организован следующим образом. По формулам (4.6) и (4.5) вычисляем приближенную корреляционную матрицу $\|r_{\mu\nu}\|$, в которой $1 \leq \mu, \nu \leq k$. Если мы хотим сохранить критерий Φ_{μ} , то просматриваем строку μ матрицы: обнаружив в ней элемент $r_{\mu\nu} \geq 0,9$, зачеркиваем столбец номер ν и строку номер ν . Если в строке μ есть несколько элементов, близких к 1, то повторяем эту процедуру несколько раз. Затем повторяем то же самое с какой-нибудь другой из уцелевших строк, например, со строкой номер μ' , если мы хотим сохранить критерий $\Phi_{\mu'}$. После конечного числа шагов останется матрица, не содержащая элементов $r_{\mu\nu} \geq 0,9$. Строки и столбцы, соответствующие зависимым критериям, будут зачеркнуты.

Заметим, что симметрия матрицы $\|r_{\mu\nu}\|$ и равенство единице всех $r_{\mu\mu} = 1$ позволяют ограничиться рассмотрением треугольной матрицы, в которой $1 \leq \mu < \nu \leq k$.

Замечание. Точно так же можно оценить коэффициент корреляции критериев $\Phi_{\mu}(A)$ и $\Phi_{\nu}(A)$ в области D . Для этого следует в формулах (4.6) осреднять значения $\Phi_{\mu}(A_i)$ и $\Phi_{\nu}(A_i) \cdot \Phi_{\mu}(A_i)$ не во всех точках $A_i \in G$, а лишь в тех q точках, которые попали в D , и использовать ту же формулу (4.5).

Пример 4.1. В задаче, рассмотренной в пункте 2.4, проектировщик сформулировал 14 критериев качества, принимавшихся во внимание при выборе оптимального решения. Треугольные матрицы $r_{\mu\nu}$, сосчитанные при $N = 256$ и при $N = 512$, приведены в табл. 4.1, 4.2. Очевидно, последние значения можно считать достаточно точными. Однако в общем случае подобную процедуру далеко не всегда следует выполнять.

Таблица 4.1

Матрица $r_{\mu\nu}$ при $N = 256$

μ	$\nu = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,92	0,59	0,51	0,95	0,82	0,58	0,41	0,94	0,88	0,58	0,49	-0,09	0,26
2	—	0,53	0,48	0,83	0,89	0,51	0,38	0,88	0,96	0,51	0,46	-0,07	0,29
3	—	—	0,83	0,65	0,49	0,95	0,73	0,56	0,50	0,95	0,77	-0,45	0,20
4	—	—	—	0,53	0,45	0,67	0,91	0,48	0,45	0,86	0,98	-0,29	0,09
5	—	—	—	—	0,77	0,67	0,44	0,87	0,76	0,64	0,50	-0,08	0,19
6	—	—	—	—	—	0,48	0,39	0,77	0,85	0,48	0,43	-0,05	0,31
7	—	—	—	—	—	—	0,58	0,56	0,49	0,86	0,59	-0,44	0,19
8	—	—	—	—	—	—	—	0,39	0,35	0,78	0,90	-0,27	0,03
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,92	0,54	0,46	-0,09	0,19
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,48	0,43	-0,08	0,24
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	-0,44	0,15
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0,28	0,05
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,02

Таблица 4.2

Матрица $r_{\mu\nu}$ при $N = 512$

μ	$\nu = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,92	0,60	0,51	0,95	0,82	0,58	0,41	0,94	0,87	0,60	0,49	-0,10	0,29
2	—	0,54	0,49	0,82	0,89	0,52	0,38	0,89	0,97	0,54	0,47	-0,08	0,31
3	—	—	0,84	0,65	0,51	0,95	0,73	0,58	0,52	0,95	0,77	-0,45	0,20
4	—	—	—	0,53	0,47	0,68	0,91	0,49	0,46	0,87	0,97	-0,30	0,11
5	—	—	—	—	0,78	0,67	0,45	0,87	0,75	0,65	0,51	-0,08	0,25
6	—	—	—	—	—	0,50	0,40	0,77	0,85	0,50	0,45	-0,05	0,33
7	—	—	—	—	—	—	0,59	0,57	0,50	0,87	0,60	-0,44	0,20
8	—	—	—	—	—	—	—	0,39	0,36	0,78	0,89	-0,27	0,04
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,93	0,57	0,47	-0,09	0,23
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,52	0,45	-0,08	0,26
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	-0,44	0,17
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0,28	0,09
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,03

В табл. 4.3 приведена матрица $r_{\mu\nu}$ после исключения зависимых критериев. В этой задаче оказалось всего шесть независимых критериев. В качестве таковых можно выбрать критерии $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_6, \Phi_{13}, \Phi_{14}$. Необходимо пояснить, что такой результат связан отнюдь не с некомпетентностью проектировщика. Наоборот, он подтверждает ха-

рактическую характеристику критериев, данную проектировщиком (см. с. 38), ибо оставшиеся критерии $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_6$ принадлежат как раз различным группам.

Из табл. 4.3 вытекает также, что если встанет вопрос о дальнейшем сокращении числа критериев, то в первую очередь отказаться надо будет от критериев Φ_4 и Φ_6 и сохранить $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_{13}, \Phi_{14}$, ибо значения $r_{1,6}$ и $r_{3,4}$ весьма значительны. Однако процедуру исключения критериев следует выполнять осторожно с учетом их значимости.

Таблица 4.3

Матрица $r_{\mu\nu}$ независимых критериев

μ	$\nu = 3$	4	6	13	14
1	0,60	0,51	0,82	0,10	0,29
3	—	0,84	0,51	0,45	0,20
4	—	—	0,47	0,30	0,11
6	—	—	—	0,05	0,33
13	—	—	—	—	0,03

4.3. О возможностях улучшения оптимального решения

Заглавие настоящего пункта звучит несколько парадоксально: если решение оптимально, то, казалось бы, улучшить его нельзя. В действительности, однако, такие слова произносят довольно часто. В самом деле, предположим, что, решив задачу о наилучшем выборе параметров, конструктор тем не менее не удовлетворен решением и хочет попытаться «улучшить» его за счет ослабления каких-то ограничений. Став на формальную точку зрения, следует сказать, что речь идет о новой задаче, так что ставить и решать ее нужно заново. Такой подход, конечно же, возможен, но часто связан с большими затратами времени. Поэтому рассмотрим коротко, как можно использовать информацию, полученную в ходе расчета решенной задачи, для ее более рациональной формулировки. Конечно, речь идет о сравнительно небольших нарушениях ограничений, ибо в противном случае задачу необходимо решать заново.

Определение ресурсов точки (модели). Очевидно, улучшение оптимальной точки может быть достигнуто путем отказа от

- (1) параметрического ограничения $\alpha_j^* \leq \alpha_j$ или $\alpha_j \leq \alpha_j^{**}$,
- (2) функционального ограничения $c_j^* \leq f_j(A)$ или $f_j(A) \leq c_j^{**}$,
- (3) критериального ограничения $\Phi_\nu(A) \leq \Phi_\nu^{**}$.

Условимся называть *ресурсом точки* A_i по ограничению $\Phi_\nu \leq \Phi_\nu^{**}$ разность $\Phi_\nu^{**} - \Phi_\nu(A_i)$. Точно так же ресурсом точки $A_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ по ограничению $\alpha_j^* \leq \alpha_j$ назовем разность $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$, а ресурсом точки A_i по ограничению $f_j(A) \leq c_j^{**}$ — разность $c_j^{**} - f_j(A_i)$ и т. д.

Для любой точки A_i из D_N легко определить ресурс по любому критериальному ограничению: для этого достаточно взглянуть на соответствующую таблицу испытаний, где имеется $\Phi_v(A_i)$ и выбранное значение Φ_v^* . Несложно вычислить также ресурс точки A_i по любому параметрическому ограничению, ибо координаты точек A_i обычно сохраняются в памяти ЭВМ (а если даже не сохраняются, то расчет их заново затруднений не представляет). Хуже обстоит дело с оценкой ресурсов по функциональным ограничениям, так как значения $f_i(A_i)$ часто не сохраняются и восстановление их требует повторного расчета проектируемой системы при $A = A_i$.

Это обстоятельство с новой стороны показывает важность рекомендации (см. пункт 2.3) о замене функциональных ограничений псевдокритериями: если соответствующее ограничение было заменено псевдокритерием, то ресурс по нему можно оценить при помощи соответствующей таблицы испытаний.

Оценка возможностей улучшения произвольной точки. Предположим, что ставится задача об улучшении значения $\Phi_\mu(A)$ исходя из найденной точки $A = A_i$. Мы не будем приводить здесь количественных оценок, так как они вряд ли имеют практическое значение, и ограничимся качественными соображениями.

Мысленно представим себе, что точка A в условиях решенной задачи движется в направлении улучшения значения $\Phi_\mu(A)$. Движение это чаще всего прекращается из-за того, что точка наталкивается на какое-то ограничение. Ресурс остановившейся точки $A = A_i$ по задержавшему ее ограничению равен нулю. Ясно, что дальнейшее улучшение $\Phi_\mu(A_i)$ возможно только при отказе от этого ограничения.

Если точка A остановилась из-за достижения функцией $\Phi_\mu(A)$ локального минимума $A = A_i$, то ресурсы A_i по всем ограничениям положительны. В этом случае отказ от какого-либо ограничения не позволяет улучшить значение $\Phi_\mu(A_i)$ в окрестности точки A_i .

На основании этих рассуждений можно дать следующие рекомендации.

(А) Если точка A_i , в которой значение $\Phi_\mu(A_i)$ минимально, имеет большие ресурсы по всем ограничениям, то пытаться улучшить (уменьшить) это значение в окрестности точки A_i путем ослабления некоторых ограничений бесполезно.

(Б) Если точка A_i имеет малые ресурсы по каким-нибудь ограничениям, то поиск в окрестности A_i перспективен только при ослаблении этих ограничений.

(В) Среди нескольких точек A_i из D , удовлетворяющих условиям (Б), лучшим кандидатом на улучшение следует считать ту из них, у кото-

рой ресурсы по ненарушаемым ограничениям больше (независимо от того, принадлежит ли эта точка E_N или нет).

Для разъяснения рекомендации (B) заметим, что если ресурс точки A по какому-нибудь ограничению мал, то есть основания опасаться, что ее движение в направлении улучшения $\Phi_\mu(A)$ будет остановлено этим ограничением.

Улучшение оптимальной точки без нарушения параметрических ограничений. Если ставится задача об улучшении найденного значения $\Phi_\mu(\hat{A})$ путем ослабления некоторых критериальных ограничений (3), то можно, не рассуждая о ресурсах \hat{A} , воспользоваться уже имеющимися таблицами испытаний. Достаточно заново повторить второй и третий этапы диалогового алгоритма; повторять первый этап и вычислять новые таблицы испытаний не надо.

Улучшение оптимальной точки за счет нарушения параметрических ограничений. Если ставится задача об улучшении найденного значения $\Phi_\mu(\hat{A})$ путем отказа от некоторых параметрических ограничений (1), то вместо того, чтобы полностью решать новую задачу, как об этом говорилось в начале раздела, можно выбрать несколько «лучших» точек из D_N и в окрестности каждой из них организовать ЛП-поиск. Слово «лучших» означает не просто лучших в смысле значений Φ_μ , но еще с учетом рекомендаций (A) — (B).

Пример 4.2. На рис. 4.3 построено множество эффективных точек AA' в пространстве параметров и соответствующая ему паретовская кривая BB' в пространстве критериев. В качестве оптимальной была выбрана точка \hat{B} , прообраз которой обозначен \hat{A} .

Ставится вопрос: нельзя ли путем нарушения параметрических ограничений уменьшить $\Phi_1(\hat{A})$, не увеличив при этом $\Phi_2(\hat{A})$? Так как точка \hat{A} расположена на границе $\alpha_2 = \alpha_2^*$, то попытку улучшения можно предпринять, отказавшись от ограничения $\alpha_2 \geq \alpha_2^*$. Выбрав новое ограничение $\alpha_2 \geq (\alpha_2^* - \delta)$, мы получим частично новую паретовскую кривую BB'' , на которой действительно можно выбрать «улучшенную» точку. Из рис. 4.3 видно, что улучшение возможно даже по обоим критериям.

О количественной оценке ресурсов. Приведенное выше определение ресурсов точки A_i как, например, $\Phi_v^{**} - \Phi_v(A_i)$ или $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$, очень удобно для проектировщика, так как выражается в естественных физических единицах. Однако если возникнет вопрос об автоматизации попыток улучшения точки A_i , то потребуются другие характеристики ресурсов, которые позволили бы сравнивать ресурсы по различным ограничениям и на основе заранее заданных допусков судить о том, какой ресурс мал, какой велик.

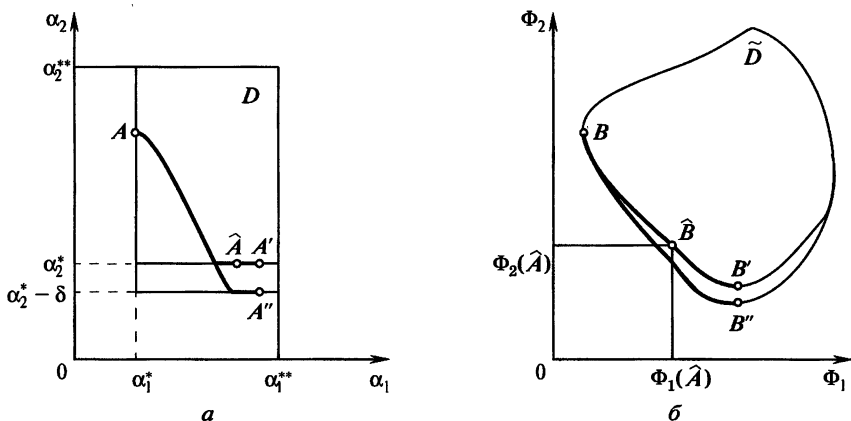


Рис. 4.3. Множество эффективных точек в пространстве параметров (*a*) и паретовская кривая в пространстве критериев (*b*)

В качестве такой характеристики можно предложить *относительный ресурс* (в процентах по отношению к величине ограничения). Например, рассматривать величину $100(\alpha_{i,j} - \alpha_j^*)/\alpha_j^*$ вместо разности $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$, если только $\alpha_j^* > 0$.

Другой возможный подход к определению относительных ресурсов состоит в следующем. Пусть среди всех q пробных точек, попавших в D , оказалось q_+ точек, худших, чем A_j , в смысле рассматриваемого ограничения. *Объемным ресурсом* точки A_i по этому ограничению назовем отношение q_+/q .

В вышеприведенном примере, где рассматривается ограничение $\alpha_j \geq \alpha_j^*$, число q_+ — это количество пробных точек A_s , попавших в D , у которых j -я координата $\alpha_{s,j}$ ближе к границе α_j^* , чем $\alpha_{i,j}$.

Легко видеть, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (q_+/q) = V_+/V_D,$$

где V_D — объем множества допустимых точек D , а V_+ — объем части D , состоящей из точек $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ таких, у которых j -я координата удовлетворяет неравенствам $\alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_{i,j}$. Очевидно также, что всегда $0 \leq q_+/q < 1$.

Замечание. Если для улучшения оптимального решения предпринимается новый расчет в параллелепипеде $\Pi' \supset \Pi$, то следует различать два случая. Во-первых, случай, когда $V_{\Pi'} \gg V_{\Pi}$. Тогда естественно выбирать новые пробные точки в Π' , не обращая внимания на то, принадлежат ли они Π или нет. Во-вторых, случай, когда объем $V_{\Pi'}$ ненамного превосходит объем V_{Π} . Тогда можно сократить время расчета путем исключения пробных точек, попавших в Π , и использовать только те пробные точки, которые принадлежат $\Pi' - \Pi$.

5

Оптимальное проектирование резонансной виброплощадки

В последние годы в различных отраслях промышленности применяются резонансные вибромашины технологического назначения. Современные машины такого типа создаются на основе теории нелинейных упругих систем, позволяющих обеспечить технологическую стабильность и регулировать законы колебаний рабочих органов с целью их оптимизации. Синтез резонансных вибромашин представляет собой достаточно сложную проблему и в общем случае сводится к определению наиболее рациональной динамической структуры и выбору параметров нелинейной системы и привода, при которых периодические движения рабочего органа наилучшим образом удовлетворяют технологическим требованиям и целому ряду конструктивных ограничений. Эти задачи всегда многокритериальны. Во многих практически важных случаях конструктор именно на основании анализа таблиц испытаний выбирает наиболее предпочтительную — «оптимальную» — модель.

В настоящем разделе описано решение двух задач такого типа, выполненное при нашем участии. Обе задачи связаны с проблемами синтеза резонансных асимметричных виброплощадок для формования железобетонных изделий [57]. В диалоге с ЭВМ участвовал главный конструктор виброплощадки ВРА-8 Л. М. Литвин.

5.1. Исходные данные

В качестве исходной модели была взята существующая виброплощадка ВРА-8 грузоподъемностью 8 т. Расчетная схема такой виброплощадки изображена на рис. 5.1. Ее колебания описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + f(x) \dot{x} + \mu k_3 \dot{x}_1 + P(x) + k_3 x_1 &= k_0 \rho (\sin vt + \mu v \cos vt), \\ m_2 \ddot{x}_2 - f(x) \dot{x} + \mu k_2 \dot{x}_2 - P(x) + k_2 x_2 &= -k_0 \rho (\sin vt + \mu v \cos vt), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где x_1 и x_2 — смещения масс m_0 и m_2 ; $x = x_1 - x_2$;

$$P(x) = (k_1 + k_0)x + \sigma(x)k_6(x + e);$$

$$f(x) = \mu_1[k_1 + k_0 + \sigma(x)k_6];$$

$\sigma(x) = 0$ при $x \geq e$, $\sigma(x) = 1$ при $x < e$. Смысл величин, входящих в уравнения (5.1), разъясняется ниже.

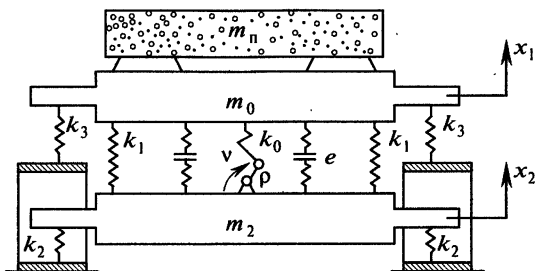


Рис. 5.1. Расчетная схема асимметричной резонансной виброплощадки

Варьируемые параметры. Перечислим десять варьируемых параметров:

- $\alpha_1 = k_0$ — жесткость приводных упругих связей [кН/см];
- $\alpha_2 = k_1$ — жесткость линейных основных упругих связей [кН/см];
- $\alpha_3 = k_6$ — жесткость буферов [кН/см];
- $\alpha_4 = k_2$ — жесткость опорных амортизаторов под рамой [кН/см];
- $\alpha_5 = k_3$ — жесткость опорных амортизаторов под рабочим органом [кН/см];
- $\alpha_6 = \rho$ — эксцентриситет привода [см];
- $\alpha_7 = m_0$ — масса рабочего органа [т];
- $\alpha_8 = m_2$ — масса уравнивающей рамы [т];
- $\alpha_9 = e_{\text{нач}}$ — зазор в буферах без технологической нагрузки [см];
- $\alpha_{10} = \nu$ — рабочая частота [с⁻¹].

Остальные величины имеют следующий смысл:

- $m_{\text{п}}$ — масса полезной нагрузки;
- k_m — коэффициент присоединения массы полезной нагрузки;
- $m_1 = m_0 + k_m m_{\text{п}}$ — приведенная масса рабочего органа;
- μ — коэффициент внутренних сопротивлений в резиновых упругих связях;
- k_{μ} — коэффициент приведения сопротивления;
- $\mu_1 = \mu + k_{\mu} m_{\text{п}}$ — приведенный коэффициент внутренних сопротивлений;
- e — зазор в буферах.

Техническое задание на проектирование включает данные о диапазоне изменения полезной нагрузки (в нашем случае $2 \text{ т} \leq m_{\text{п}} \leq 8 \text{ т}$), о диапазоне рабочих частот (в нашем случае $50 \text{ с}^{-1} \leq \nu \leq 100 \text{ с}^{-1}$), о пределах изменения ускорений рабочего органа при движении вверх и вниз: $\tilde{w}_{1\text{в}}$ и $\tilde{w}_{1\text{н}}$. Рабочие режимы необходимо реализовать на восходящей ветви частотной характеристики (в дорезонансной области). Динамика и методы расчета по уравнениям (5.1) рассмотрены в работе

[57], где для построения приближенных периодических решений используется метод Крылова — Боголюбова.

Функциональные ограничения. Для формулировки функциональных ограничений вводятся следующие функции:

$$f_1(A) = \bar{w}_{1B},$$

$$f_2(A) = \bar{w}_{1H},$$

$$f_3(A) = k_0 \rho,$$

$$f_4(A) = m_0 + M - (k_1 + k_3)Q(gk')^{-1},$$

$$f_5(A) = m_0 + m_2 + M - (k_2 + k_3)Q(gk')^{-1},$$

$$f_6(A) = \frac{k_2 Mg - k_0 \rho (k_2 + k_3)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} - e_{\text{нач}},$$

$$f_7(A) = v - \bar{w}(A),$$

где M — максимальная величина полезной нагрузки (в нашем случае — 8 т), k' — жесткость одного резинового амортизатора [кН/см], Q — предельная нагрузка на один амортизатор [кН], $\bar{w}(A)$ — собственная частота линеаризованной системы [с⁻¹].

Функции $f_1(A)$, $f_2(A)$ зависят от решения системы (5.1), а функции $f_3(A) - f_6(A)$ выражаются непосредственно через параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$.

Функциональные ограничения задаются неравенствами

$$9 \leq f_1(A) \leq 22, \quad 40 \leq f_2(A) \leq 100, \quad f_3(A) \leq 120 \quad (5.2)$$

и

$$f_4(A) \leq 0, \quad f_5(A) \leq 0, \quad f_6(A) \leq 0, \quad f_7(A) \leq 0. \quad (5.3)$$

Первые два ограничения обеспечивают соответствие закона колебаний рабочего органа требованиям технического задания, третье — ограничивает величину возмущающей силы, четвертое и пятое — ограничивают нагрузки на резиновые амортизаторы, шестое — связано с нагрузкой на упругую подвеску, а седьмое — обеспечивает реализацию рабочих режимов в дорезонансной области.

Ограничения (5.2) не являются «жесткими»: в зависимости от конкретных условий производства и требований, предъявляемых к железобетонным изделиям, их можно в некоторой степени варьировать. Ограничения (5.3) нарушать нельзя.

Критерии качества. Качество проектируемой виброплощадки предлагается оценивать по шести критериям, которые желательно уменьшить. Первый критерий — масса машины — вычисляется непо-

средственно по параметрам: $\Phi_1 = \alpha_7 + \alpha_8$. Остальные пять критериев выражаются через решение системы (5.1), которое зависит от массы полезной нагрузки m_n . В соответствии с принятой методикой [57] система (5.1) решалась четырежды: при m_n , равной 2, 4, 6, 8 т. Символы \max и \min в следующих формулах означают, что выбираются соответственно наибольшие или наименьшие значения величин, полученные при таких четырех расчетах. Итак, имеем следующие критерии качества.

- Масса машины $\Phi_1(A) = m_0 + m_2$.

- Асимметрия закона колебаний рабочего органа $\Phi_2(A) = \max(\tilde{w}_{1B}/\tilde{w}_{1H})$.

- Динамическое усилие в приводе $\Phi_3(A) = \max k_0 a_0$, где a_0 — деформация приводных упругих связей.

- Динамическая нагрузка на фундамент $\Phi_4(A) = \max \|k_2 a_2\| - \|k_1 a_1\|$, где a_1 и a_2 — амплитуды колебаний рабочего органа и уравнивающей рамы.

- Характеристики стабильности «верхнего» и «нижнего» ускорения

$$\Phi_5(A) = \frac{\max \tilde{w}_{1B}}{\min \tilde{w}_{1B}} - 1, \quad \Phi_6(A) = \frac{\max \tilde{w}_{1H}}{\min \tilde{w}_{1H}} - 1.$$

Проектировщик предложил считать наиболее важным критерий Φ_1 , затем идут критерии Φ_3 и Φ_4 , за ними критерий Φ_2 и, наконец, наименее важные критерии Φ_5 и Φ_6 . Однако при этом было оговорено, что в зависимости от конкретных результатов ранжирование критериев может измениться.

5.2. Первая задача: исследование возможностей модернизации исходной модели

Ставится вопрос: возможно ли за счет сравнительно небольших отклонений от параметров действующей модели найти лучшую модель, которую можно было бы реализовать без принципиальных конструктивных изменений?

Для решения этого вопроса конструктор указал небольшие пределы вариации параметров, приведенные в табл. 5.1. Они определяют девятимерный параллелепипед Π , в центре которого расположена точка A_1 с параметрами действующей модели ВРА-8. В качестве критерияльных ограничений были назначены значения критериев в точке A_1 , т. е. $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$ при всех $1 \leq v \leq 6$.

Значения параметров

j	Первая задача					Вторая задача			
	α_j^*	$\alpha_{1,j}$	α_j^{**}	$\alpha_{248,j}$	$\alpha_{475,j}$	α_j^*	α_j^{**}	$\alpha'_{116,j}$	$\alpha''_{12,j}$
1	44	48	52	44,96	50,85	20	100	31,79	48,87
2	92	96	100	99,03	99,42	30	150	59,04	83,12
3	1400	1600	1800	1758	1490	400	3000	1449	2396
4	20	25	30	22,07	20,09	20	60	20,42	20,00
5	20	25	30	29,49	26,54	20	60	48,64	46,87
6	0,5	0,7	0,9	0,848	0,830	0,5	2,0	0,971	1,065
7	3	3	3	3	3	3	7	3	3
8	3	5	7	4,02	5,34	3	7	3	3
9	0,0	0,2	0,4	0,398	0,110	0,3	1,5	0,438	0,637
10	94	97	100	95,10	94,20	50	100	91,48	90,63

Пробный расчет и изменение постановки задачи. В параллелепипеде Π при функциональных ограничениях (5.2) и (5.3) было проведено $N' = 256$ испытаний. Количество точек, удовлетворяющих функциональным ограничениям, оказалось равным $N = 24$, так что $\gamma \approx 0,093$.

Чтобы увеличить количество анализируемых вариантов (иными словами, чтобы увеличить γ), было решено заменить первые три не жестких ограничения псевдокритериями. Сделано это было следующим нестандартным образом. Во-первых, эти ограничения были ослаблены по сравнению с (5.2):

$$8,5 \leq f_1(A) \leq 22,5, \quad 37 \leq f_2(A) \leq 103, \quad f_3(A) \leq 123, \quad (5.4)$$

Во-вторых, были введены псевдокритерии

$$\begin{aligned} \Phi_7 &= \max f_3(A), \\ \Phi_8^{(1)} &= \min f_1(A), \quad \Phi_8^{(2)} = \max f_1(A), \\ \Phi_9^{(1)} &= \min f_2(A), \quad \Phi_9^{(2)} = \max f_2(A). \end{aligned}$$

Смысл символов \max и \min здесь тот же, что для критериев качества. Правило использования этих псевдокритериев: если точка A удовлетворяет ослабленным ограничениям (5.4), но не удовлетворяет ограничениям (5.2), то конструктор сам решает, включить ли точку A в число допустимых точек. Ясно, что такое решение будет приниматься в тех случаях, когда нарушение ограничений (5.2) компенсируется доста-

точно большим выигрышем в других критериях. Таким образом, случай, когда ограничения (5.4) выполнены, а (5.2) нет, оказывается как бы «зоной размышления» для конструктора.

Решено было также вычислять ресурсы Δ_v точек A_i по введенным псевдокритериям Φ_v относительно ограничений (5.2) (см. пункт 4.3). Если точка A_i не удовлетворяет какому-то из ограничений (5.2), но удовлетворяет ослабленному ограничению (5.4), то соответствующий ресурс полагался равным нулю: $\Delta_v = 0$.

Второй пробный расчет. Вновь было проведено $N' = 256$ испытаний, причем в таблицы испытаний попало $N = 33$ точки. При этом были обнаружены интересные точки A_{40} и A_{248} . Они по ряду важных критериев лучше, чем A_1 , и это компенсирует некоторое ухудшение величины других критериев. Обе эти точки попали в таблицы испытаний только благодаря ослаблению функциональных ограничений (5.2). Наиболее интересной конструктор счел точку A_{248} (см. табл. 5.1, 5.2). Он обратил также внимание на то, что ресурсы этих точек по Φ_8 (для A_{40}) и по Φ_9 (для A_{248}) исчерпаны, а некоторые координаты точек близки к границам Π . Попытки улучшить эти точки не предпринимались.

Диапазон изменения Φ_1 оказался $7,02 \leq \Phi_1 \leq 8,89$, хотя из исходных ограничений следует, что Φ_1 может меняться от 6 до 10. Конструктор решил, что нужно проанализировать причину такого ограниченного изменения Φ_1 , чтобы выяснить возможности дальнейшего уменьшения Φ_1 .

Таблица 5.2

Значения критериев качества

v	Первая задача					Вторая задача		
	$\min_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_1)$	$\max_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_{248})$	$\Phi_v(A_{475})$	$\min_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A'_{116})$	$\Phi_v(A'_{12})$
1	7,02	8,00	9,04	7,02	8,34	6,95	6,00	6,00
2	0,233	0,256	0,313	0,283	0,241	0,147	0,234	0,240
3	28,25	31,72	70,62	28,34	30,94	19,54	26,44	28,21
4	3,70	6,70	12,51	6,36	3,70	4,63	5,68	5,40
5	0,047	0,421	1,143	0,768	0,357	0,050	0,895	0,674
6	0,051	0,359	1,222	0,871	0,227	0,054	0,953	0,749

Продолжение расчета первой задачи. В том же параллелепипеде Π при ограничениях (5.3) и (5.4) испытания были продолжены до $N' = 1024$. В область G попало $N = 108$ точек, так что в конечном счете

$\gamma \approx 0,105$ — увеличение незначительное. Результаты испытаний приведены в табл. 5.3¹⁾.

Представленные в табл. 5.3 критериальные ограничения определяют допустимое множество D , содержащее одну-единственную точку A_1 . Горизонтальные линии соответствуют критериальным ограничениям. В табл. 5.3 они отвечают первому диалогу. Из таблицы следует, что вектор критериальных ограничений для прототипа (точки A_1) равен (8,00; 0,256; 31,72; 6,70; 0,421; 0,359).

При решении аналогичных задач у проектировщиков нередко появляется желание «поиграть» критериальными ограничениями: попытаться понять, что дают те или иные уступки, во что обходится ужесточение тех или иных ограничений. В настоящем эксперименте конструктор рассмотрел семь наборов критериальных ограничений. Мы опишем три из них.

Первый диалог конструктора с ЭВМ. Среди всех 108 точек, попавших в таблицы испытаний, конструктор попросил выделить эффективные²⁾. С учетом всех шести критериев оказалось 59 эффективных точек и среди них точка A_1 . Следовательно, модель A_1 не представляется возможным улучшить по всем шести критериям. В определенном смысле данный вывод следует считать естественным, так как исследуется весьма хорошая конструкция машины.

Второй диалог конструктора с ЭВМ. Конструктор решил сделать уступки по наименее существенным критериям Φ_5 и Φ_6 : были выбраны ограничения $\Phi_5^{**} = 1$, $\Phi_6^{**} = 1$. А по первым четырем критериям, по-прежнему, $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$, $1 \leq v \leq 4$.

В этом случае в допустимое множество D попали три точки: A_1 , A_{794} и A_{922} , из которых две последние — эффективные. Обе эти точки конструктор счел примерно эквивалентными: лучшее значение $\Phi_1(A_{922})$ уравнивается лучшими значениями $\Phi_3(A_{794})$ и $\Phi_4(A_{794})$. Любопытно, что точку A_1 оказалось возможным улучшить по всем четырем важнейшим критериям.

Третий диалог конструктора с ЭВМ. Конструктор решил поискать точки, которые по одному из первых четырех критериев несколько хуже, чем A_1 , зато по всем другим критериям — заметно лучше. С этой целью по таблицам испытаний были выбраны ограничения

$$\begin{aligned} \Phi_1^{**} &= \Phi_1(A_{996}) = 8,34, & \Phi_2^{**} &= \Phi_2(A_{836}) = 0,291, \\ \Phi_3^{**} &= \Phi_3(A_{445}) = 33,62, & \Phi_4^{**} &= \Phi_4(A_{847}) = 7,61. \end{aligned}$$

По-прежнему $\Phi_5^{**} = 1$, $\Phi_6^{**} = 1$.

¹⁾ Табл. 5.3 размещена на первом форзаце книги.

²⁾ Для краткости в этом разделе приблизительно эффективные точки будем называть эффективными.

В допустимое множество попало всего 15 точек, из них 12 эффективных (если считать решающими только 4 первых критерия). Среди них конструктор отдал предпочтение эффективным точкам A_{248} , A_{475} и A_{922} (см. табл. 5.1, табл. 5.2).

Наиболее интересным и даже неожиданным результатом оказалась точка A_{475} , которая несколько хуже точки A_1 по критерию Φ_1 , но зато лучше ее по всем другим критериям Φ_2 — Φ_6 . Значение $\Phi_4(A_{475})$ минимально и значительно лучше, чем значение $\Phi_4(A_1)$. Об интересных соображениях конструктора, связанных с этой точкой, сказано ниже в выводах.

Последующие диалоги конструктора с ЭВМ существенно новых результатов не дали. Нетрудно заметить, что именно третий диалог более всего соответствует методике, изложенной в пункте 2.2.

Попытки улучшить точку A_{475} . Координаты $\alpha_{475,4} = 20,09$ и $\alpha_{475,10} = 94,20$ близки к границам параллелепипеда $\alpha_4^* = 20$ и $\alpha_{10}^* = 94$. Поэтому в соответствии с рекомендацией, приведенной на с. 45, был проведен расчет точки A' , отличающейся от A_{475} этими двумя координатами: $\alpha'_j = \alpha_{475,j}$ при $j \neq 4, j \neq 10$; $\alpha'_4 = 20$, $\alpha'_{10} = 94$. Значения всех критериев остались практически теми же и только $\Phi_4(A') = 3,65$ несколько лучше, чем $\Phi_4(A_{475}) = 3,70$.

Был проведен ЛП-поиск в небольшом параллелепипеде, границы которого отличаются от координат A_{475} не более, чем на $\pm 5\%$. После 32 испытаний точку A_{475} практически улучшить не удалось.

С учетом динамики машины конструктор предложил провести в плоскости параметров α_8 и α_{10} (при $3,00 \leq \alpha_8 \leq 5,33$, $94 \leq \alpha_{10} \leq 100$) ЛП-поиск, фиксируя остальные координаты точки A_{475} . При 128 испытаниях был получен ряд интересных, по мнению конструктора, точек, но ни одной из них отдать предпочтение перед точкой A_{475} он не решился.

Анализ зависимости критериев. Методом, изложенным в пункте 4.2, были сосчитаны коэффициенты корреляции критериев в области G , содержащей 108 пробных точек. Результаты, приведенные в табл. 5.4, показывают, что среди всех Φ_v при $1 \leq v \leq 6$ только Φ_5 и Φ_6 сильно зависимы: $r_{5,6} = 0,89$. Внимательный анализ таблиц испытаний подтвердил этот вывод: группы лучших (и худших) точек по отношению к обоим критериям состоят в основном из одних и тех же точек, хотя и расположенных в несколько другом порядке.

Коэффициенты корреляции критериев $r_{\mu\nu}$

μ	$\nu = 2$	3	4	5	6
1	-0,14	0,60	0,00	-0,63	-0,56
2	—	0,24	0,05	0,17	0,14
3	—	—	0,32	-0,64	-0,47
4	—	—	—	-0,32	-0,24
5	—	—	—	—	0,89

Некоторые выводы

1. Действующая модель ВРА-8, которой соответствует точка A_1 , по всем шести критериям неуплучшаема. Однако существуют модели, соответствующие точкам A_{794} и A_{922} , которые несколько превосходят исходную по четырем важнейшим критериям $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$.

2. Найдена интересная модель, соответствующая точке A_{248} , оптимальной по критерию Φ_1 . Ее масса примерно на 1 т меньше, чем масса исходной модели, а значения остальных критериев, по мнению конструктора, приемлемы.

3. Обнаружена точка A_{475} , оптимальная по критерию Φ_4 . Модель, соответствующая этой точке, по массе на 0,34 т тяжелее, чем исходная модель, но по остальным пяти критериям превосходит ее. Динамическая нагрузка на фундамент (критерий Φ_4) у найденной модели почти вдвое меньше, чем у исходной! Для вновь проектируемых заводов предполагается строить многоэтажные здания, в которых виброплощадки можно будет устанавливать не только на первом, но и на более высоких этажах. Тогда уменьшение нагрузки на перекрытия приобретет первостепенное значение, и критерий Φ_4 станет главным.

4. Как уже указывалось, из $N' = 1024$ пробных точек в Π всего $N = 108$ точек попали в G . Анализ ресурсов позволил выяснить, что среди всех точек, не удовлетворяющих функциональным ограничениям, 72% точек не удовлетворяют ограничениям, связанным с $f_1(A)$, 7% — с $f_2(A)$, 3% — с $f_6(A)$ и 18% — с $f_7(A)$.

5. В постановке задачи предусматривалось, что α_8 (масса уравнивающей рамы) заключена в пределах $3 \leq \alpha_8 \leq 7$. В действительности из-за функциональных ограничений пределы оказались более узкими: $4,02 \leq \alpha_8 \leq 6,04$. Этим вызвано фактическое ограничение изменения массы Φ_1 , обнаруженное при втором пробном расчете.

6. В целом возможности улучшения существующей модели ВРА-8 за счет сравнительно небольших изменений параметров весьма ограничены.

5.3. Вторая задача: эскизное проектирование машины с минимальной массой

Ставится задача существенно улучшить значение критерия Φ_1 (масса машины) и, если это возможно, улучшить также значения других критериев. Так как предыдущее исследование показало, что в параллелепипеде Π такая задача неразрешима, то было решено резко увеличить область поиска.

Глобальное исследование. Конструктор определил новый параллелепипед Π' при помощи параметрических ограничений α_j^* и α_j^{**} , приведенных в табл. 5.1. Здесь пределы изменения α_7 и α_8 определены из условий динамической прочности. Нетрудно проверить, что при фиксированном α_7 отношение девятимерных объемов $V_{\Pi'}$ к V_{Π} превосходит 10^6 .

При тех же функциональных ограничениях (5.3) и (5.4) в Π' было выбрано $N' = 4096$ пробных точек, из которых в таблицы испытаний попало только $N = 100$ точек. Значит, $\gamma \approx N/N' = 0,025$: такое уменьшение γ по сравнению с $\gamma \approx 0,1$ в первой задаче вполне естественно, так как там поиск велся в окрестности точки A_1 , которая всем ограничениям удовлетворяет.

Вопреки ожиданиям, минимальные значения некоторых критериев в этом опыте оказались больше, чем минимальные значения в Π (табл. 5.2). Это указывает на недостаточно подробный просмотр большого параллелепипеда Π' . Стоит, впрочем, отметить, что коэффициенты корреляции критериев, сосчитанные по этим 100 точкам, близки к полученным в разделе 5.2. Конструктор перепробовал шесть вариантов критериальных ограничений; при этом количество точек, попавших в допустимое множество, колебалось от 0 до 20. После анализа всех 100 точек было принято решение продолжить исследование по локальному пути.

Локальное исследование. Были отобраны семь лучших точек. Забегая вперед, отметим, что наилучшие результаты получены в ходе поиска вблизи каждой из четырех точек, у которых ресурсы по Φ_8 и по Φ_9 оказались большими. Именно такое предсказание сделано конструктором на основе вывода 4 в пункте 5.2 (см. с. 80). Наоборот, поиск вблизи каждой из трех точек, у которых ресурсы $\Delta_9 = 0$, существенно новых результатов не дал, хотя эти три точки и были эффективными. С некоторым опозданием мы решили перенести локальный поиск на границу Π' , а именно фиксировать минимальные возможные

значения $\alpha_7 = 3$ и $\alpha_8 = 3$. Дело в том, что при таких предположениях $\Phi_1 = \alpha_7 + \alpha_8$ будет минимальным: $\Phi_1 = 6$ т.

Вот как, например, был организован поиск вблизи точки $A_{1452} = (36,8; 61,5; 1430; 22,2; 46,4; 0,954; 4,52; 5,12; 0,425; 80,6)$: рассматривался восьмимерный параллелепипед, определенный условиями

$$\begin{array}{ll} 30 \leq \alpha_1 \leq 40, & 0,9 \leq \alpha_6 \leq 1,0, \\ 56 \leq \alpha_2 \leq 66, & \alpha_7 = 3,0, \\ 1400 \leq \alpha_3 \leq 1450, & \alpha_8 = 3,0, \\ 20 \leq \alpha_4 \leq 25, & 0,40 \leq \alpha_9 \leq 0,45, \\ 44 \leq \alpha_5 \leq 49, & 90 \leq \alpha_{10} \leq 100. \end{array}$$

В этом параллелепипеде было проведено $N' = 128$ испытаний, из которых $N = 71$ удовлетворили функциональным ограничениям; наилучшие точки определялись на основе изучения таблиц испытаний.

После этих экспериментов конструктор отобрал две наилучшие, по его мнению, точки A'_{116} и A''_{12} , которые были найдены вблизи точки A_{1452} и, соответственно, вблизи точки A_{2406} . Параметры наилучших точек приведены в табл. 5.1, а значения критериев — в табл. 5.2.

Некоторые выводы

1. Найдены две модели, соответствующие точкам A'_{116} и A''_{12} , достаточно хорошие по всем критериям и абсолютно минимальные по массе, — по сравнению с точкой A_{248} , найденной в пункте 5.2, массу удалось уменьшить еще на 1 т.

2. Низкое значение γ указывает на сложность поставленной задачи.

3. Возможно, решение задачи упростилось бы, если бы значения $\alpha_7 = 3$, $\alpha_8 = 3$ были фиксированы перед глобальным исследованием.

Заключение. Значения критериев для всех наиболее интересных моделей, найденных в пунктах 5.2 и 5.3, а также для исходной модели (точка A_1) приведены в табл. 5.2. Результаты проведенных расчетов расцениваются специалистами как очень интересные. Во-первых, доказано, что металлоемкость машины можно уменьшить на 2 т и при этом снизить усилия в приводе и динамические нагрузки на основании на 10—20% (точки A'_{116} и A''_{12}). Во-вторых, доказана возможность значительного снижения динамической нагрузки на фундамент с одновременным улучшением всех других критериев за счет увеличения массы машины менее, чем на 5% (точка A_{475}). Полученные результаты стимулируют дальнейшее совершенствование конструкций резонансных виброплощадок для формирования железобетонных изделий.

6

Многокритериальные задачи проектирования с использованием метода конечных элементов

В разделах 6—8 мы с помощью некоторых примеров расскажем о важных многокритериальных задачах — проектирования с использованием метода конечных элементов, идентификации, доводки опытных образцов, проектирования регулируемых систем, исследования больших систем. Постановки и решения этих задач оптимизации основаны на методе ИПП. Многие из них характерны для самых разных областей человеческой деятельности. Поскольку читатель уже знаком с методом ИПП, ряд деталей приложения метода для решения этих задач мы опустим.

Задачи оптимизации с использованием метода конечных элементов (МКЭ) выделены в самостоятельный класс в силу их достаточно большого распространения. Поиск оптимальных решений для многих из них сопряжен с большими затратами компьютерного времени.

Конечно-элементные программы общего назначения, такие, как NASTRAN, I-DEAS, ANSYS и др., получили широкое распространение в самых разнообразных сферах промышленности при расчетах и проектировании автомобилей, самолетов, судов, станков и т. п. В задачах динамики и прочности критериями оптимизации являются массы, максимальные напряжения в наиболее опасных (нагруженных) точках конструкции, габариты, динамические усилия, действующие в конструкции. Оптимизируются также частоты, амплитуды перемещений (скоростей, ускорений) и многие другие важные и противоречивые характеристики объекта. Оптимизация параметров с использованием МКЭ в указанных программах однокритериальная. В то же время, как уже было сказано, по существу, мы имеем многокритериальные задачи. Поэтому реализованные в этих программах подходы к выбору оптимальных решений не отражают специфики рассматриваемого класса задач и не помогают специалистам в принятии правильных решений. Ниже приведено решение типичной задачи оптимального проектирования — выбор параметров картера заднего моста автомобиля с учетом многих критериев.

Многочисленные примеры многокритериального проектирования с использованием МКЭ и метода ИПП — рамы автомобиля, шпиндельного узла станка и т. п. — описаны в работах [12, 13, 17, 22, 25, 37, 44, 45, 72, 82, 95—99, 133, 135—137].

6.1. Задача оптимизации картера

Цель исследований — снижение массы, улучшение прочностных и других характеристик в зависимости от изменения толщины стенок картера.

Рассматривалась задача о статическом нагружении картера заднего моста силами, передающимися со стороны задней подвески автомобиля и ведущих колес. Картер моста оперт в местах расположения колес. В процессе исследований определялись эквивалентные напряжения в конструкции, деформации картера и угловые отклонения полуосей относительно оси главной передачи.

Конечно-элементная модель картера. Модель состоит из 1456 элементов и 1238 узлов (рис. 6.1). При моделировании конструкции использовались линейные трех- и четырехузловые оболочечные элементы. В местах утолщений использовались балочные элементы.

Варьируемые параметры. Это семь параметров, определяющих толщины различных частей конструкции, а именно: α_1 — стенки картера, α_2 — опоры подшипниковых узлов, α_3 — вертикального ребра жесткости, α_4 и α_5 — горизонтальных ребер жесткости, α_6 — задней крышки картера, α_7 — втулок кожухов полуосей. Пределы изменения варьируемых параметров [мм], таковы (см. рис. 6.1):

$$\begin{aligned} 4 \leq \alpha_1 \leq 7; \quad 4 \leq \alpha_2 \leq 13; \quad 4 \leq \alpha_3 \leq 13; \quad 4 \leq \alpha_4 \leq 11; \\ 4 \leq \alpha_5 \leq 11; \quad 4 \leq \alpha_6 \leq 7; \quad 4 \leq \alpha_7 \leq 13. \end{aligned}$$

Функциональные зависимости. В нашем случае функциональные зависимости $f_l(\alpha)$ соответствуют эквивалентным напряжениям в конструкции. Напряжения исследуются в 12 наиболее опасных областях конструкции $f_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, 12$. Величина допускаемого эквивалентного напряжения по теории Хубера — Мизеса принята равной $[\sigma] = 15 \text{ кГ/мм}^2$.

Критерии качества и псевдокритерии. Приняты следующие пять критериев: Φ_1 — масса всей конструкции (кг); Φ_2 — максимальные прогибы в конструкции (мм); Φ_3 — максимальные эквивалентные напряжения в конструкции (кГ/мм^2). Значения Φ_3 не должны превышать заданного уровня допускаемых напряжений. Еще о двух критериях Φ_{16} и Φ_{17} будет сказано ниже.

В работе все функциональные зависимости $f_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, 12$ представлены в виде псевдокритериев Φ_4, \dots, Φ_{15} ; Φ_3 — это наибольшее напряжение среди всех значений Φ_4, \dots, Φ_{15} при фиксированном векторе параметров α^i , $i = \overline{1, N}$ (см. ¹⁾), $\Phi_3(\alpha) = \max_{4 \leq v \leq 15} \Phi_v(\alpha)$. Три из 12 точек —

¹⁾ Запись $i = \overline{1, N}$ означает $i = 1, 2, \dots, N$.

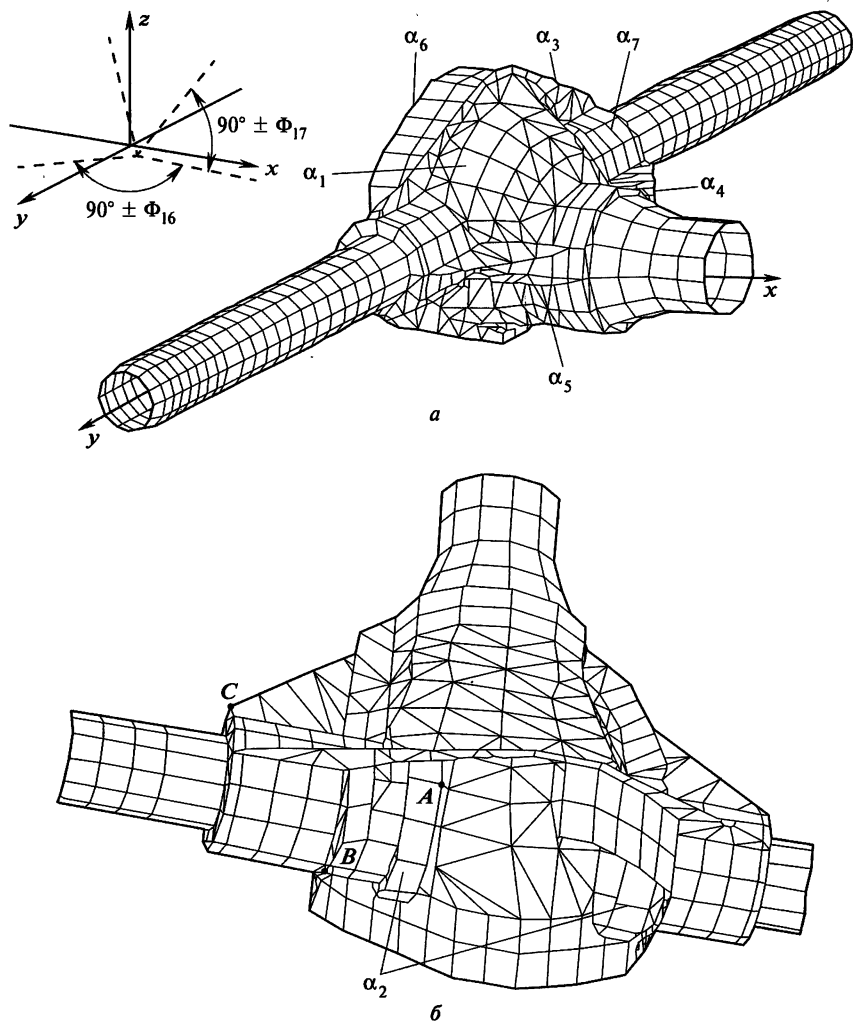


Рис. 6.1. Конечно-элементная модель картера:

(а) — параметры $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$; (б) — параметр α_2 и наиболее опасные точки конструкции A, B и C

A, B и C — показаны на рис. 6.1 и 6.3. Псевдокритерии $\Phi_4(\alpha), \Phi_7(\alpha)$ и $\Phi_{13}(\alpha)$ определяют эквивалентные напряжения в точках A, B и C соответственно. Как будет показано ниже, напряжения в этих точках достигают максимума. Представление функциональных зависимостей в виде псевдокритериев позволяет не только уменьшить максимальные напряжения в конструкции и определить напряжения во всех

наиболее опасных точках, но и лучшим образом перераспределить напряжения в исследуемых точках конструкции. Значения критериев Φ_{16} и Φ_{17} есть изменения (в результате деформации картера) углового положения полуосей относительно оси главной передачи (в градусах). Таким образом, имеем вектор $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{17})$.

Поскольку автомобиль серийный, то одним из важных критериев является снижение массы картера заднего моста (критерий Φ_1). Снижение прогибов (критерия Φ_2) конструкции увеличивает ее долговечность. Критерии Φ_{16} и Φ_{17} должны содействовать лучшим условиям работы дифференциала: уменьшению износа зубьев, повышению контактной и изгибной выносливости зубьев. Критерии $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_{16}$ и Φ_{17} также ответственны за работу подшипниковых узлов. Кроме этого, необходимо минимизировать максимальные эквивалентные напряжения. Таким образом, имеем 5 критериев оптимизации — $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_{16}, \Phi_{17}$ и 12 псевдокритериев — Φ_4, \dots, Φ_{15} . Все критерии и псевдокритерии нужно минимизировать. Для поиска Парето-оптимальных решений мы используем только критерии качества.

6.2. Решение задачи и анализ результатов

Проведено 256 испытаний. Допустимые множества строились и анализировались при различных критериальных ограничениях. После семи диалогов специалистов с компьютером окончательно приняты следующие критериальные ограничения:

$$\Phi_1^{**} = 71,5; \quad \Phi_2^{**} = 1,33; \quad \Phi_3^{**} = \Phi_4^{**} = \dots = \Phi_{15}^{**} = 15; \quad \Phi_{16}^{**} = \Phi_{17}^{**} = 0,031.$$

Допустимое множество составило 22 решения. Они представлены в табл. 6.1, псевдокритерии здесь не показаны. Парето-оптимальных решений четырнадцать: 21, 43, 62, 67, 79, 110, 113, 158, 174, 181, 229, 233, 246 и 254, эти решения в таблице выделены.

Анализ полученных решений позволил сделать следующие заключения.

■ 1. В картере максимальные напряжения возникают в трех областях, которые на рис. 6.1, б отмечены буквами *A*, *B* и *C*. Область *A* соответствует месту расположения подшипника (псевдокритерий Φ_4), *B* — месту сопряжения втулки с картером (псевдокритерий Φ_7) и *C* — горизонтальному ребру жесткости (псевдокритерий Φ_{13}). Так, в первой строке табл. 6.1 запись 13,11 (*B*) в колонке Φ_3 означает, что для проекта 21 в области *B* максимальное напряжение равно 13,11 кГ/мм².

Для проекта 38 (третья строка таблицы) запись 13,45 (А) означает, что максимальное напряжение равно 13,45 кГ/мм² в области А и т. д.

Таблица 6.1

Допустимые решения

α^i	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_{16}	Φ_{17}
21	70,31	1,31	13,11(В)	0,022	0,026
23	71,42	1,29	14,57(В)	0,021	0,024
38	70,99	1,26	13,45(А)	0,025	0,029
43	71,41	1,27	14,13(В)	0,018	0,022
62	70,31	1,24	12,28(А)	0,019	0,024
67	70,64	1,26	11,50(С)	0,024	0,027
77	71,21	1,29	14,15(В)	0,022	0,026
79	70,71	1,27	12,68(В)	0,018	0,023
110	70,70	1,23	12,43(А)	0,021	0,026
113	69,38	1,31	14,43(В)	0,023	0,026
121	70,53	1,29	13,28(В)	0,025	0,029
129	70,66	1,30	14,85(А)	0,027	0,029
158	70,37	1,26	13,70(А)	0,019	0,024
174	70,31	1,27	13,41(А)	0,024	0,028
181	70,15	1,27	13,42(В)	0,022	0,025
189	70,78	1,33	14,52(В)	0,026	0,028
206	71,24	1,23	13,68(А)	0,022	0,026
229	70,04	1,27	12,67(В)	0,023	0,027
233	69,85	1,27	11,53(А)	0,023	0,027
242	69,91	1,28	14,42(А)	0,024	0,029
246	68,96	1,32	14,41(В)	0,026	0,028
254	69,63	1,32	13,99(В)	0,029	0,031

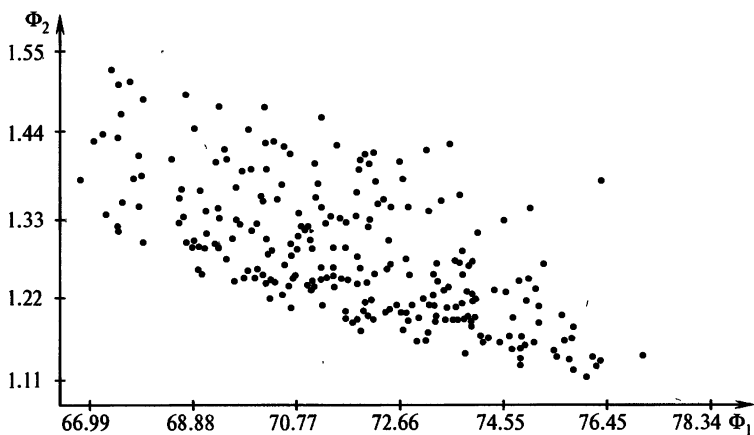


Рис. 6.2. Проекция 256 векторов критериев на плоскость Φ_1 — Φ_2

Из этой таблицы видно, что для проектов 23, 113, 129, 189, 242 и 246 значения максимальных напряжений в областях *A* и *B* приближаются к предельному значению, равному 15 кг/мм^2 . Отметим, что во всех иных областях, кроме *A*, *B* и *C*, конструкция практически не

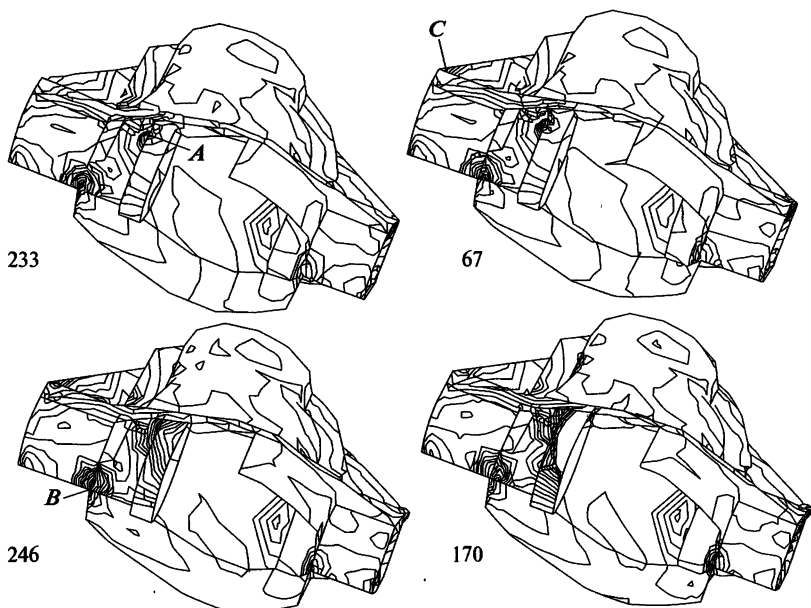


Рис. 6.3. Визуализация псевдокритериев: изолинии напряжений на четырех проектах конструкции картера

нагружена. Это подтвердил и анализ гистограмм. (Более подробно о гистограммах см. [134] и инструкцию к программному комплексу MOVI [140]). Анализ показал, что имеется возможность дальнейшего улучшения основных критериев за счет изменения некоторых ограничений на параметры. Из табл. 6.1 видно, что массы картеров всех проектов лежат в пределах 68,96—71,42 кг (колонка Φ_1), в то время как масса прототипа составляет 74 кг. Допустимые значения прогибов составляют 1,23—1,33 мм (колонка Φ_2), что также значительно меньше, чем у прототипа. Противоречивость критериев Φ_1 и Φ_2 видна из анализа рис. 6.2.

С целью визуализации напряжений в наиболее опасных областях картера на рис. 6.3 показаны изолинии напряжений для допустимых вариантов 67, 233, 246 и недопустимого варианта 170. Этот последний вариант имеет достаточно малую массу картера $\Phi_1 = 67,52$ кг, но большой прогиб, равный $\Phi_2 = 1,55$ мм, а также напряжения в области *B* выше допустимых (17 кГ/мм^2).

■ 2. Наибольший интерес представили проекты 67 и 233, для которых в опасных областях конструкции *A*, *B* и *C* характерны невысокие максимальные напряжения. Проект 233 имеет лучшие значения по таким важным показателям, как масса и прогиб, а также хорошие значения по другим критериям. Этот вариант признан оптимальным. По сравнению с прототипом масса уменьшена на 4 кг. Интересно отметить, что проект 233 не является наилучшим ни по одному из локальных критериев. Вместе с тем выбор его в качестве оптимального не представил трудностей для специалистов.



Многокритериальные задачи идентификации

Задачи многокритериальной, или векторной, идентификации характерны для всех областей знаний и технологий. Эффективность метода ИПП применительно к таким задачам для механических систем обсуждается в работах [44, 45, 61, 74, 95–99, 118, 119, 133, 135–137, 139].

Построение достоверной математической модели имеет первостепенное значение в задачах оптимизации параметров исследуемого объекта, доводки опытного образца, улучшения прототипа и во многих других случаях. Многокритериальная идентификация — новое направление в теории и практике идентификации математических моделей [133–137]. Рассмотрим основные особенности задач этого класса.

Главная их особенность заключается в следующем. В традиционных задачах идентификации по умолчанию предполагается, что объект адекватно описывается математической моделью. В общем случае при исследовании таких сложных объектов, как машины, механизмы, конструкции, не приходится говорить о достаточном соответствии математической модели реальному объекту. Поэтому нет оснований пользоваться лишь одним показателем адекватности, что имеет место в традиционных задачах идентификации. В отличие от традиционных методов в задачах многокритериальной идентификации имеется возможность оценивать адекватность математической модели по множеству локальных критериев близости. Такой многокритериальный подход нужен, прежде всего, для определения степени соответствия математической модели реальному объекту. Сложность реальной проблемы идентификации состоит в том, что, как правило, у специалистов нет достаточной информации о границах вариации многих идентифицируемых параметров.

7.1. Метод исследования пространства параметров в задачах векторной идентификации

Обозначим через $\Phi_v^c(\alpha)$, $v = \overline{1, k}$ характеристики (критерии), определяемые из анализа математической модели, описывающей исследуемый объект, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ — вектор параметров исследуемой модели.

Пусть Φ_v^{exp} — экспериментальное значение v -го критерия, измеренного непосредственно на опытном образце, например на прототипе. При этом предполагается, что был проведен достаточно точный и полный эксперимент. Полнота эксперимента понимается в том смысле, что определяемые характеристики Φ_v^{exp} измеряются во всех основных узлах, в наиболее характерных точках конструкции объекта. Их должно быть достаточно для корректной постановки задачи идентификации.

Постановка задачи. Имеется математическая модель объекта или множество моделей, описывающих его функционирование. Пусть $\Phi = (\|\Phi_1^c - \Phi_1^{\text{exp}}\|, \dots, \|\Phi_k^c - \Phi_k^{\text{exp}}\|)$, где $\|\cdot\|$ — локальный критерий адекватности или близости. Этот критерий есть функция от невязки $\Phi_v^c - \Phi_v^{\text{exp}}$. Зачастую он выражается как $(\Phi_v^c - \Phi_v^{\text{exp}})^2$ или $|\Phi_v^c - \Phi_v^{\text{exp}}|$.

Требуется, сопоставляя экспериментальные и расчетные характеристики, определить соответствие модели реальному объекту и установить ее параметры, т. е. найти векторы параметров α^i , которые удовлетворяют параметрическим, функциональным и критериальным ограничениям:

$$\alpha_j^* < \alpha_j < \alpha_j^{**}, \quad j = \overline{1, r}; \quad c_l^* \leq f_l(\alpha) \leq c_l^*, \quad l = \overline{1, t};$$

$$\|\Phi_v^c(\alpha^i) - \Phi_v^{\text{exp}}\| \leq \Phi_v^{**}. \quad (7.1)$$

Ограничения (7.1) определяют *допустимую область* D_α [95, 97, 98, 133, 135–137, 139]. Здесь Φ_v^{**} — критериальные ограничения, которые назначаются в процессе диалога исследователя с компьютером на основании анализа таблиц испытаний. Эти ограничения во многом также определяются точностью натурального эксперимента и физическим смыслом критериев Φ_v .

В соответствии с методом ИПП строятся и анализируются таблицы испытаний, определяются значения Φ_v^{**} и находятся векторы, удовлетворяющие ограничениям (7.1). Эти векторы α^i , принадлежащие допустимой области D_α , назовем *адекватными*.

Восстановление параметров математической модели в соответствии с заданными ограничениями определяет суть *векторной параметрической идентификации*. Прделав эту операцию на всех имеющихся структурах (математических моделях), мы тем самым осуществим *векторную структурную идентификацию* и в конечном счете определим наилучшую модель по критериям адекватности. В задачах структурной идентификации при исследовании различных математических моделей объекта существенно могут изменяться число варьируемых параметров и их границы, а также количество критериев близости. Пример структурной оптимизации описан в пункте 8.4.

Векторы α_{id}^i , принадлежащие множеству адекватных векторов и определенные с помощью некоторого решающего правила как наиболее предпочтительные, назовем *идентифицированными*. Роль такого правила зачастую выполняет неформальный анализ множества адекватных векторов. Если в результате его выделяются несколько наиболее предпочтительных и эквивалентных друг другу векторов α_{id}^i , то мы получаем неоднозначное решение задачи идентификации.

Совокупность идентифицированных векторов α_{id}^i образует область идентификации $D_{id} = \bigcup_i \alpha_{id}^i$. Иногда, если провести дополнительные натурные эксперименты и пересмотреть значения Φ_v^{**} , удастся уменьшить область D_{id} и даже добиться того, чтобы она состояла из одного вектора. Однако так бывает далеко не всегда. Неоднозначное восстановление параметров — плата за неполноту представления реального объекта в виде математической модели, неполноту натурального эксперимента и т. д.

В ряде случаев множество D_α может оказаться пустым. Главные причины возможной пустоты D_α — несовершенство математических моделей и отсутствие знаний о границах поиска идентифицируемых решений. Однако и сам по себе процесс решения задачи — поиск области D_α — крайне важен, даже если его результаты оказываются не столь обнадеживающими. В этом случае специалист получает возможность аргументированно, а не только на уровне интуиции аттестовать математическую модель, оценить ее достоинства и недостатки по всем критериям близости, а также на основе данной информации скорректировать постановку задачи. Векторная идентификация — это нередко единственный путь определения качества математической модели сложного объекта, а следовательно, путь, гарантирующий достоверность результатов в процессе дальнейшей оптимизации.

В задачах векторной идентификации нас в равной степени интересуют как значения критериев адекватности, так и значения *параметров*. Тот факт, что все векторы с хорошими значениями критериев адекватности должны быть в поле зрения специалиста, объясняется следующими соображениями. На практике, как правило, не представляется возможным формализовать все требования, предъявляемые к объекту. Поэтому если из двух векторов с приблизительно одинаково приемлемыми значениями критериев адекватности будет учитываться только один, то с позиций неформализованных критериев может оказаться отброшенным более предпочтительный вектор. Допустим, что все требования удастся учесть. Тогда все упомянутые векторы необходимо учитывать после этапа идентификации при дальнейшей работе с математической моделью. Так, например, при оптимизации пара-

метров модели, если исключить один из двух одинаково адекватных векторов, по критериям качества может оказаться лучшим именно этот отброшенный вектор.

Приведенный алгоритм успешно используется на практике. Он достаточно универсален, так как применим для линейных и нелинейных систем, как с распределенными, так и с сосредоточенными параметрами. Вопросы аппроксимации допустимой области рассмотрены в работах [133, 135—137].

7.2. Многокритериальные задачи доводки опытных образцов

Можно привести много примеров, когда машины и их узлы доводились опытным путем на протяжении многих лет с большими затратами, сопоставимыми с затратами на создание нового объекта. Задачи этого класса представляют собой симбиоз многокритериальных задач идентификации и проектирования. Здесь прежде всего нужно установить по критериям адекватности или близости (на основании сопоставления натуральных экспериментов с результатами модельных расчетов) адекватность математических моделей. Ниже мы покажем решения этих задач на основе метода ИПП, которые описаны в работах [44, 45, 61, 95, 97, 118, 119, 133, 135—137, 139].

Смысл задачи заключается в том, что после установления адекватности математической модели (по критериям адекватности или близости) необходимо улучшить опытный образец (прототип) по критериям качества. Решение задачи состоит из двух этапов.

Первый этап — задача векторной идентификации. На этом этапе определяется допустимое множество D_α как результат решения многокритериальной задачи идентификации. Здесь мы идентифицируем математическую модель и ее параметры по критериям адекватности.

Второй этап — многокритериальная задача оптимизации. На этом этапе решаем задачу оптимизации по многим критериям качества — строим параллелепипед Π на D_α и определяем допустимую область D ($D \subset D_\alpha$) с учетом критериев качества.

В задачах доводки в отличие от задач проектирования возможности внесения существенных изменений в реальную конструкцию достаточно ограничены (конструкция уже выполнена, и ее кардинальное изменение может повлечь за собой недопустимые материальные затраты). Вместе с тем во многих случаях удавалось за счет сравнительно небольших изменений конструкции достичь значительных результатов в короткие сроки. Фактор времени особенно важен, когда

речь идет о серийном и массовом производстве автомобилей, станков, судов, самолетов.

Отметим важную особенность задач этого класса: необходимость в достаточно полном и качественном натурном эксперименте. Например, для автомобилей это означает проведение ходовых испытаний на полигонах с различными покрытиями, а также стендовых прочностных, динамических, акустических и др. испытаний. Размерности векторов критериев адекватности и критериев качества здесь достигают многих десятков. Ниже приведены три задачи векторной идентификации. В задаче доводки грузового автомобиля размерность вектора критерия адекватности составляла 65, а вектора критерия качества — 20. В задаче идентификации параметров шпиндельного узла количество критериев адекватности — 36. Для доводки сложных и массовых объектов — автомобилей, станков, судов, летательных аппаратов — рассматриваемый в этом разделе многокритериальный подход является необходимым.

7.3. Задача доводки автомобиля

На примере грузового автомобиля ставилась и решалась задача доводки опытного образца с точки зрения его вибрационных характеристик. Исследования и расчеты колебаний автомобиля выполнялись на основе анализа его упрощенной схемы. Анализ экспериментальных данных показал, что для рассматриваемого типа автомобиля в частотном диапазоне $[0,5; 16,0]$ Гц можно ограничиться изучением только вертикальных и продольно-угловых колебаний с помощью модели, изображенной на рис. 7.1.

Модель представляет собой совокупность сосредоточенных масс, соединенных безынерционными упругими и демпфирующими элементами, и составлена при следующих допущениях:

- (1) кузов, двигатель, рама, кабина — абсолютно твердые тела;
- (2) моменты инерции мостов относительно осей вращения колес равны нулю;
- (3) неуравновешенные силы и гироскопические моменты вращения трансмиссии и двигателя равны нулю;
- (4) колебания масс автомобиля малы;
- (5) контакт шин с дорогой точечный;
- (6) центр масс кузова все время находится в продольной плоскости симметрии и движется так, что проекция его скорости на горизонтальную плоскость остается постоянной;
- (7) упругие и демпфирующие элементы имеют линейные характеристики.

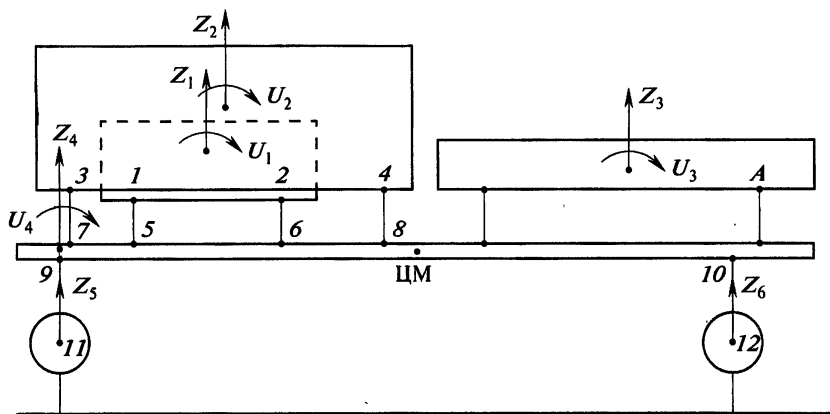


Рис. 7.1. Модель автомобиля:

Z_1 – Z_6 — линейные перемещения; U_1 – U_4 — угловые перемещения; ЦМ — центр массы рамы; 1–12 — точки, в которых регистрировался дорожный эксперимент

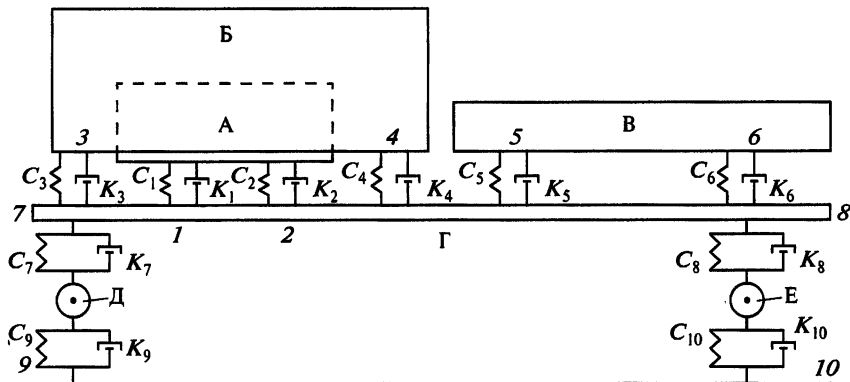


Рис. 7.2. Схема автомобиля:

А — двигатель, Б — кабина, В — платформа, Г — рама, Д и Е — мосты; 1 и 2 — передняя и задняя опоры двигателя; 3 и 4 — передняя и задняя опоры кабины; 5 и 6 — передняя и задняя опоры платформы; 7 и 8 — передняя и задняя подвески; 9 и 10 — передняя и задняя шины

Схема автомобиля представлена на рис. 7.2. В качестве оценок вибрации конструкции приняты спектральные плотности ускорений во всех точках, связанных между собой соединительными элементами; спектры относительных деформаций и углы поворота тел. Спектры определялись в частотном диапазоне, включающем в себя 5 октав, начиная с 0,5 Гц, с разрешением 1/12. Эквивалентные жесткости и коэффициенты демпфирования соединительных элементов 7 и 8 для

каждого из трех рассматриваемых типов дорог¹⁾ были заданы по результатам динамических стендовых испытаний. При расчете колебаний нелинейные свойства рессор учитывались выбором соответствующих эквивалентных жесткостей и коэффициентов демпфирования для различных уровней возбуждения. Испытания бортового автомобиля²⁾ были проведены для определения спектров виброускорений конструкции при номинальной нагрузке. В соответствии с техническим заданием виброускорения замерялись в 12 точках (рис. 7.1).

Идентифицируемые параметры. В качестве таковых приняты:

- (1) жесткости соединительных элементов $C_1—C_6$ и $C_9—C_{10}$;
- (2) коэффициенты демпфирования соединительных элементов $K_1—K_6$ и $K_9—K_{10}$ (рис. 7.2).

Эти 16 параметров не представлялось возможным определить в результате стендовых и дорожных экспериментов. Исходные границы их вариации образуют 16-мерный параллелепипед Π^1 . Значения еще четырех параметров C_7, C_8, K_7, K_8 были определены экспериментально. Все 20 параметров представлены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1

Идентифицированные параметры прототипа

Номер параметра	Обозначение	Размерность	Границы параметров		Параметры прототипа	Проект 1820
			Нижняя α_j^*	Верхняя α_j^{**}		
1	C_1	Н/м	$6,6 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$7,7 \cdot 10^5$	$7,08 \cdot 10^5$
2	C_2	Н/м	$3,05 \cdot 10^6$	$4,14 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^6$	$3,29 \cdot 10^6$
3	C_3	Н/м	$9,6 \cdot 10^5$	$1,32 \cdot 10^6$	$1,14 \cdot 10^6$	$1,06 \cdot 10^6$
4	C_4	Н/м	$6,1 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$6,5 \cdot 10^5$	$6,83 \cdot 10^5$
5	C_5	Н/м	$1,6 \cdot 10^8$	$2,4 \cdot 10^8$	$2,0 \cdot 10^8$	$1,8 \cdot 10^8$
6	C_6	Н/м	$1,6 \cdot 10^8$	$2,4 \cdot 10^8$	$2,0 \cdot 10^8$	$1,92 \cdot 10^8$
7	C_7	Н/м	$4,2 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$	$2,99 \cdot 10^5$
8	C_8	Н/м	$1,05 \cdot 10^6$	$1,05 \cdot 10^6$	$1,05 \cdot 10^6$	$7,21 \cdot 10^5$
9	C_9	Н/м	$1,6 \cdot 10^6$	$2,4 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^6$	$1,63 \cdot 10^6$
10	C_{10}	Н/м	$2,88 \cdot 10^6$	$4,32 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^6$	$3,01 \cdot 10^6$

1) Рассматривались следующие типы дорог: динамическая, бульжник ровного замощения и профильный бульжник.

2) Испытания автомобиля проводились на автополигоне НАМИ в Дмитрове и на вибрационных стендах АО ЗИЛ.

Номер параметра	Обозначение	Размерность	Границы параметров		Параметры прототипа	Проект 1820
			Нижняя α_j^*	Верхняя α_j^{**}		
11	K_1	Н·с/м	1200	2800	2000	3400
12	K_2	Н·с/м	4700	11 000	7800	9210
13	K_3	Н·с/м	4000	6000	5000	4920
14	K_4	Н·с/м	3200	4800	4000	4376
15	K_5	Н·с/м	20 000	30 000	25 000	25 700
16	K_6	Н·с/м	20 000	30 000	25 000	24 467
17	K_7	Н·с/м	14 000	14 000	14 000	14 665
18	K_8	Н·с/м	36 000	36 000	36 000	42 588
19	K_9	Н·с/м	3200	4800	4000	3908
20	K_{10}	Н·с/м	6000	10400	8000	5902

На рис. 7.3 показаны кривые СПК ускорений. Сокращение СПК означает *корень квадратный из значения спектральной плотности*, $G = \sqrt{g(f)}$, размерность этой величины $\text{м/с}^2 \cdot \sqrt{\text{Гц}}$. Границы частотного диапазона обозначены как f_{1j}, f_{2j} .

Критерии адекватности. Решение задачи идентификации. Для оценки близости расчетных и экспериментальных кривых необходимо ввести критерии адекватности. Близость этих кривых оценивается тремя группами критериев:

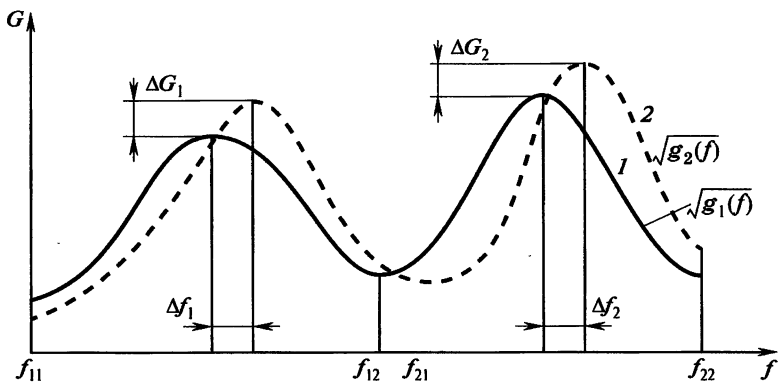


Рис. 7.3. Графики СПК:

1 — расчет математической модели; 2 — результат дорожных испытаний; f_{1j}, f_{2j} — границы частотных диапазонов

- (1) рассогласованием по частотам, на которых наблюдается локальный максимум СПК,

$$\Phi_i = |\Delta f_{i \max}|, \quad i = 1, \dots, n;$$

- (2) разностью значений, соответствующих локальному максимуму СПК,

$$\Phi_i = |\Delta G_{i \max}|, \quad i = n + 1, \dots, 2n,$$

где n — количество локальных максимумов на графике СПК;

- (3) разностью средних квадратических значений (СКЗ) ускорений в заданном диапазоне

$$\Phi_i = \left| \left(\int_{f_{1j}}^{f_{2j}} g_1(f) df \right)^{1/2} - \left(\int_{f_{1j}}^{f_{2j}} g_2(f) df \right)^{1/2} \right|, \quad i = 2n + 1, \dots, m,$$

здесь j равно 1 или 2 в зависимости от рассматриваемой точки автомобиля; $f_{11} = 0,5$ Гц, $f_{12} = f_{21} = 6$ Гц, $f_{22} = 16$ Гц.

Число критериев адекватности составило 65. Поэтому было принято решение не учитывать на данном этапе критериев, отражающих значения спектров относительных деформаций и углов поворота элементов конструкции. Они учитывались позже — после построения допустимого множества по перечисленным выше трем группам критериев.

Расчет математической модели выполнен при 60 значениях частоты f_i в диапазоне [0,5; 16] Гц. Обозначим частоты, в которых экспериментальная кривая СПК ускорений достигает локального максимума, через $f_{i \max}^{\text{exp}}$, а сами значения этих максимумов — через $G_{i \max}^{\text{exp}}$.

Для всех 12 точек потребовалось 65 критериев близости. Первая группа состоит из 22 критериев, которые определяют значения частот, вторая группа — следующие 22 критерия — это СПК, а 21 критерий для СКЗ [м/с²] составляют третью группу. Выбирался интервал $[f_{i \max}^{\text{exp}} \pm 0,1 f_{i \max}^{\text{exp}}]$ Гц. Затем определялись локальные максимумы $G_{i \max}$ и соответствующие им величины $f_{i \max}$, попавшие в данный интервал, и рассчитывались критерии:

$$\Phi_i = |f_{i \max}^{\text{exp}} - f_{i \max}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \Phi_i = |G_{i \max}^{\text{exp}} - G_{i \max}|, \quad i = n + 1, \dots, 2n,$$

здесь n равно 1, 2 или 3 в зависимости от исследуемой точки автомобиля. В табл. 7.2 приведены экспериментальные значения Φ_v^{exp} , $v = 1, \dots, 65$.

Экспериментальные значения критериев Φ_v^{exp} в 12 точках¹⁾

Номер критерия	Номер точки	Φ_v^{exp}	Номер критерия	Номер точки	Φ_v^{exp}	Номер критерия	Номер точки	Φ_v^{exp}
1	1	2,12	23	1	0,712	45	1	2,04
2	1	6,5	24	1	0,9	46	1	5,46
3	1	9,875	25	1	0,836	47	2	1,28
4	2	10,0	26	-2	1,3	48	2	4,06
5	3	1,75	27	3	0,546	49	3	0,69
6	3	10,125	28	3	0,787	50	3	1,67
7	4	1,25	29	4	0,537	51	4	0,507
8	4	10,75	30	4	1,07	52	4	1,125
9	5	2,125	31	5	0,771	53	5	2,07
10	5	6,5	32	5	0,769	54	5	3,4
11	6	9,5	33	6	0,794	55	6	0,833
12	7	1,25	34	7	0,527	56	6	1,98
13	7	9,75	35	7	0,937	57	7	1,01
14	8	1,25	36	8	0,530	58	7	2,71
15	8	4,5	37	8	0,595	59	8	0,537
16	8	9,5	38	8	0,409	60	8	0,570
17	9	1,75	39	9	0,433	61	9	2,5
18	9	9,5	40	9	1,61	62	10	1,26
19	10	1,62	41	10	0,865	63	11	2,0
20	11	9,75	42	10	0,225	64	11	12,4
21	11	9,87	43	11	4,05	65	12	6,85
22	12	12,0	44	12	2,26	—	—	—

¹⁾ Номера точек соответствуют рис. 7.1.

В табл. 7.1 представлены значения параметров для прототипа. В процессе исследований предстояло выяснить, насколько удачен прототип, можно ли его улучшить, если не по всем, то хотя бы по основным показателям, а также определить, существуют ли альтернативные решения, представляющие интерес для специалистов. Было проведено 4096 испытаний в параллелепипеде П¹. Исходные значения границ варьируемых параметров корректировались по результатам

анализа таблиц испытаний и гистограмм [134, 140]. В результате получен параллелепипед Π^2 , построены таблицы испытаний, установлены ограничения на критерии, получены 11 векторов, для которых эти ограничения выполняются.

Аналогичные исследования проведены с учетом испытаний на других дорогах автополигона. В результате построено допустимое множество D_α , являющееся пересечением допустимых множеств, соответствующих каждой из трех дорог. В это множество попали три вектора. На основании анализа параметров векторов построен параллелепипед Π , в котором решалась задача оптимизации.

Параметры и критерии качества. Варьировались величины жесткостей и коэффициенты демпфирования рессор. Они образовали 20-мерный параллелепипед Π . Границы варьируемых параметров выбирались специалистами, исходя из построенного по итогам решения задачи идентификации множества D_α , а также реальных возможностей технологии производства.

Принятые критерии можно условно разделить на четыре группы: комфорта; долговечности; сохранности груза; безопасности.

В качестве критерия комфорта Φ_1 в соответствии с ISO 2631 принято значение взвешенного по частотам СКЗ ускорения, определенного в точке 4 кабины (рис. 7.1). Эта точка расположена ближе всего к сиденью водителя. Поскольку сиденье на данном автомобиле не поддрессорено, ускорения на его подушке и на полу кабины в заданном частотном диапазоне [0,5; 16,0] Гц близки. Все это дает основание принять в качестве критерия Φ_1 ускорение на полу кабины.

Ко второй группе критериев — это Φ_2 — Φ_9 и Φ_{11} — Φ_{18} — отнесены величины СКЗ деформаций.

В качестве критерия сохранности груза Φ_{10} использовалась утроенная величина СКЗ ускорения в точке А кузова (рис. 7.1) во всем диапазоне частот. Величина указанного критерия не должна превышать величины $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, так как в случае нарушения этого условия возможен отрыв груза.

Последнюю группу составили критерии безопасности Φ_{19} и Φ_{20} . Они характеризуют вероятность отрыва колеса от дороги

$$\Phi_i = 3 \cdot \frac{\text{СКЗ}d_j}{R_j} C_j, \quad i = 19, 20, \quad j = 11, 12,$$

где СКЗ d_j — величина СКЗ деформации для точек 11 и 12, [м]; R_j — статическая нагрузка в зоне контакта колес с дорогой, [Н]; C_j — жест-

кость шины, [Н/м]. Каждый из этих критериев вычислялся для передних и задних колес автомобиля.

Если значение критерия безопасности равно единице, может произойти отрыв колес от дороги. Для этих критериев введено ограничение — они должны быть меньше единицы. В табл. 7.3 приведены значения критериев качества для прототипа.

Таблица 7.3

Значения критериев качества в 12 точках¹⁾

Номер критерия	Диапазон	Размерность	Номер точки	Значения критериев качества		Критерии качества
				Прототип	Проект 1820	
1	<i>W</i>	м/с ²	4	2,149	1,55	Комфорт
2	<i>L</i>	м	1	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$9,84 \cdot 10^{-4}$	Долговечность
3	<i>H</i>	м	1	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	То же
4	<i>L</i>	м	2	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	» »
5	<i>H</i>	м	2	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	» »
6	<i>L</i>	м	3	$7,85 \cdot 10^{-4}$	$7,38 \cdot 10^{-4}$	» »
7	<i>H</i>	м	3	$6,94 \cdot 10^{-4}$	$6,71 \cdot 10^{-4}$	» »
8	<i>L</i>	м	4	$5,52 \cdot 10^{-4}$	$4,42 \cdot 10^{-4}$	» »
9	<i>H</i>	м	4	$5,33 \cdot 10^{-4}$	$3,57 \cdot 10^{-4}$	» »
10	<i>W</i>	м/с ²	A	10,66	8,3	Сохранность груза
11	<i>L</i>	м	9	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$1,037 \cdot 10^{-2}$	Долговечность
12	<i>H</i>	м	9	$7,78 \cdot 10^{-4}$	$6,012 \cdot 10^{-4}$	То же
13	<i>L</i>	м	10	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$9,065 \cdot 10^{-3}$	» »
14	<i>H</i>	м	10	$5,62 \cdot 10^{-4}$	$4,11 \cdot 10^{-4}$	» »
15	<i>L</i>	м	11	$2,75 \cdot 10^{-3}$	$2,879 \cdot 10^{-3}$	» »
16	<i>H</i>	м	11	$3,46 \cdot 10^{-3}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	» »
17	<i>L</i>	м	12	$3,72 \cdot 10^{-3}$	$3,528 \cdot 10^{-3}$	» »
18	<i>H</i>	м	12	$2,58 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-3}$	» »
19	<i>W</i>	—	11	$6,26 \cdot 10^{-1}$	$5,12 \cdot 10^{-1}$	Безопасность
20	<i>W</i>	—	12	$6,59 \cdot 10^{-1}$	$5,296 \cdot 10^{-1}$	Безопасность

¹⁾ Номера точек соответствуют рис. 7.1.

Весь рассматриваемый диапазон частот [0,5; 16] Гц, обозначенный в таблице буквой *W*, разбит на два интервала. Первый из них, от 0,5 до 6 Гц, обозначен буквой *L*, второй, от 6 до 16 Гц, — буквой *H*.

Критерии качества рассчитывались либо отдельно для этих интервалов, либо во всем рассматриваемом диапазоне.

Номера точек конструкции (рис. 7.1), в которых определялись значения критериев качества, указаны в четвертом столбце табл. 7.3. Специалисты определили, что по критерию комфорта, а также по критериям долговечности прототип нуждается в существенном улучшении.

В параллелепипеде Π было проведено $N = 4096$ испытаний. В допустимое множество D попал 21 вариант. Из них 20 вариантов являлись Парето-оптимальными.

Анализ допустимого множества D . Специалисты выбрали как наиболее предпочтительное решение вариант 1820. Оптимальный вариант превосходит прототип по 18 критериям, в число которых попали наиболее значимые критерии (табл. 7.3). Параметры оптимального варианта приведены в табл. 7.1.

Таким образом, на основании решения задачи векторной идентификации определены значения параметров жесткости и демпфирования, обеспечивающие адекватность исследуемой модели автомобиля, а также найдены допустимые границы вариации этих параметров для последующего решения задачи оптимизации. Найдено множество допустимых вариантов, представляющих интерес для специалистов. Некоторые из них по основным критериям качества лучше прототипа. Даны рекомендации по изменению параметров подвески автомобиля, улучшающие основные критерии качества — комфорта, безопасности, долговечности и сохранности груза, см. работы [61, 99, 135]. Так, для улучшения конструкции рекомендовано уменьшить жесткости обеих опор двигателя, передней опоры кабины и шин. Жесткости подвески, а также задней опоры кабины следует несколько увеличить. Величины коэффициентов демпфирования необходимо изменить так, как это указано в табл. 7.1 для оптимального варианта 1820.

Подводя итоги данной работы, отметим, что в результате решения задачи векторной идентификации представляется возможным:

- (1) определить области адекватных и идентифицированных решений и таким образом судить о соответствии математической модели реальному объекту;
- (2) установив адекватность математической модели, сформулировать границы вариации параметров и обосновать перечень критериев качества для последующего решения задачи многокритериальной оптимизации — задачи доводки машины.

7.4. Векторная идентификация параметров долбежного станка

Рассмотрим идентификацию параметров на примере долбежного станка с тяговым усилием 30 кН.

Описание эксперимента. Долбежный станок (рис. 7.4) состоит из вертикальной I и горизонтальной II станин, соединенных между собой с помощью винтов по стыку А. На вертикальной станине установлен долбляк III, который несет резец и осуществляет возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости. На нижней станине располагается стол IV, на котором закрепляется обрабатываемое изделие. Обработка осуществляется при возвратно-поступательном перемещении резца относительно обрабатываемого изделия.

Наиболее существенный недостаток станка — низкая виброустойчивость в наиболее важном диапазоне скоростей резания 6—12 м/мин. Возникающие в процессе резания вибрации ограничивают производственные возможности станка, снижают его надежность и долговечность, ухудшают точность и качество обрабатываемой поверхности.

Для определения реакции механической системы станка на динамическое возмущение проведено экспериментальное исследование виброустойчивости его гидромеханической системы. Были выбраны восемь точек 1—8, в которых на различной высоте над уровнем направляющих горизонтальной станины закреплялись датчики (рис. 7.4). В этих точках при различной частоте возмущающей силы измерялась амплитуда вибраций. Исследования динамической жесткости механической системы и форм колебаний станка показали, что недостаточной жесткостью обладает стык вертикальной и горизонтальной станин. На основании полученных экспериментальных данных определена собственная частота колебаний, приводящих к потере устойчивости и возникновению автоколебаний. При резании она составляет 15,9 Гц. На этой частоте возникают резонансные явления, и колебания имеют

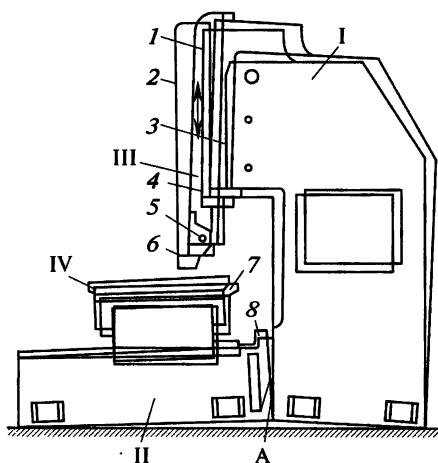


Рис. 7.4. Схема расположения датчиков на станке. «Раскрытие» стыка А

максимальную амплитуду. При этом имеет место «раскрытие» стыка: вертикальная и горизонтальная станины получают относительное смещение (см. рис. 7.4).

Построение динамической модели. Анализ эксперимента показал, что наиболее точные данные соответствуют двум формам колебаний — горизонтально-поворотной и вертикальной. Первая форма колебаний как наиболее виброактивная вызывает «раскрытие» стыка А вертикальной и горизонтальной станин, большие амплитуды колебаний резца относительно заготовки и снижение чистоты обрабатываемой поверхности.

Учитывая, что оба основных для данного станка типа колебаний соответствуют его фронтальной плоскости (проходящей через оси обеих станин), для решения задачи идентификации была выбрана плоская модель (рис. 7.5). В ней отражены следующие узлы долбежного станка: вертикальная станина, горизонтальная станина, стол, долбьяк, резец, соединения между столом и нижней станиной станка и между опорами станка и фундаментом, стык между горизонтальной и вертикальной станинами, соединение долбьяка в направляющих с вертикальной станиной, крепления гидроцилиндра и салазок долбьяка.

Идентифицируемые параметры. К параметрам модели относятся следующие величины: массы и моменты инерции, координаты крепления виброизолирующих и упругоинерционных элементов относительно узлов модели, углы поворота местных систем координат, жест-

костные характеристики, коэффициенты демпфирования элементов, механические характеристики упругоинерционных элементов.

Горизонтальная, вертикальная и поворотная жесткости опор станин на фундаменте (связи 1—8 и 6—7 на рис. 7.5) и жесткости стыка между станинами (связь 1—6 на рис. 7.5) в значительной мере определяют основной дефект станка — «раскрытие» стыка между станинами. Точно измерить по эксперименту или задать *a priori* каким-либо путем эти вели-

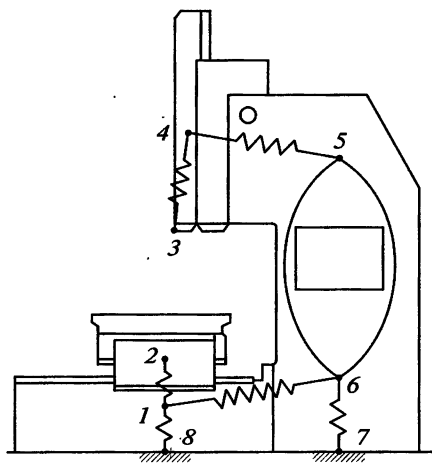


Рис. 7.5. Динамическая модель станка

ны достаточно трудно. Поэтому было решено идентифицировать следующие девять параметров, определяющих виброактивные формы колебаний станка:

$$\alpha = (c_y^{1-8}, c_z^{1-8}, p_x^{1-8}, c_y^{1-6}, c_z^{1-6}, p_x^{1-6}, c_y^{6-7}, c_z^{6-7}, p_x^{6-7}).$$

Здесь c_y , c_z и p_x — соответственно горизонтальная, вертикальная и поворотная жесткости, 1—8, 6—7 и 1—6 — индексы связей.

Критерии адекватности. На основании анализа математической модели станка определен набор критериев адекватности, оценивающих наиболее виброактивные формы колебаний системы в области низких частот, так как выполненный натурный эксперимент обладает достаточной полнотой лишь для этой области. Невязки рассчитывались как

$$\Phi_v = \left| \frac{\Phi_v^{\text{exp}} - \Phi_v^c}{\Phi_v^{\text{exp}}} \right| \cdot 100\%, \quad v = \overline{1, 8}.$$

Поэтому критерии адекватности отражают степень соответствия модели реальному объекту преимущественно в диапазоне низких частот. В табл. 7.4 приведены экспериментальные характеристики Φ_v^{exp} , которые определяют список критериев адекватности.

Таблица 7.4

Критерии адекватности

Φ_v^{exp}	Физическое содержание критериев	Экспериментальные значения
Φ_1^{exp}	Основная частота собственных колебаний [Гц]	16
Φ_2^{exp}	Вторая собственная частота [Гц]	30
Φ_3^{exp}	Коэффициент формы колебаний в узле № 3 [отн. ед.]	0,738
Φ_4^{exp}	Коэффициент формы колебаний в узле № 5 [отн. ед.]	0,934
Φ_5^{exp}	Коэффициент формы колебаний в узле № 6 [отн. ед.]	0,283
Φ_6^{exp}	Величина виброподатливости в зоне резания на первой резонансной частоте [мм/Н]	$3,2 \cdot 10^{-4}$
Φ_7^{exp}	Величина статического смещения в узле № 3 при усилии резания 1 кН [мм]	$0,492 \cdot 10^{-2}$
Φ_8^{exp}	Относительная величина статических перемещений в зоне резания при усилии резания 1 кН [мм]	$0,288 \cdot 10^{-2}$

Функциональные зависимости и ограничения. При решении задачи идентификации параметров динамической модели был сформулирован перечень из восьми функциональных ограничений, учитывающих точность изготовления и монтажа узлов станка, а также точность установки его на опорах.

Решение задачи. Цель задачи — улучшить основные характеристики станка — надежность, точность, виброустойчивость.

В исходном параллелепипеде Π^1 было сделано $N = 2048$ испытаний, и оказалось, что допустимое множество D_α пусто. В дальнейшем границы вариации параметров корректировались 4 раза. В результате был определен параллелепипед Π^5 . В нем были найдены векторы α_{id}^{59} и α_{id}^{395} (или просто векторы 59 и 395), которые считаются лучшими по следующим соображениям (табл. 7.5):

- (1) сравнительно хорошие невязки по частотным критериям (2,56—16,5% для вектора α_{id}^{395});
- (2) соответствие величины невязок по критерию Φ_8 точности эксперимента (учтено относительное смещение резца и детали в зоне резания при статическом нагружении, определенное в ходе эксперимента с наибольшей точностью);
- (3) примерно одинаковые величины отклонений по критериям Φ_3 , Φ_6 , Φ_7 (особенно для вектора α_{id}^{395}), поскольку эти три критерия характеризуют колебания в зоне резания.

Были проанализированы параметры множества адекватных векторов. Установлено, что для лучших решений сохранилась тенденция к большим величинам горизонтальной жесткости стыка «стол — нижняя станина».

На основании выполненных исследований был определен параллелепипед Π^6 , в котором были найдены пять адекватных векторов.

Таблица 7.5

Лучшие решения

Решения	Критерии адекватности, %							
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8
α_{id}^{59}	3,9	18,6	4,19	8,2	35,6	4,95	6,72	2,08
α_{id}^{395}	2,56	16,5	5,1	8,32	31,7	5,72	5,8	0,48
α_{id}^{185}	3,51	14,1	4,35	8,16	36,1	4,54	5,38	1,61

Наиболее предпочтительным оказался вектор α_{id}^{185} (табл. 7.5). Для него характерны относительно малые величины невязок по основным критериям близости. Причины выбора данного вектора заключаются в следующем:

- (1) его параметры правильно отражают низкую поворотную жесткость стойки, характерную для данной конструкции станка;
- (2) большая податливость привода продольной передачи и контактирующих поверхностей стола, приводящая к большим виброперемещениям в зоне резания;
- (3) для всех критериев, описывающих колебательный процесс в зоне резания, характерна наибольшая равномерность невязок Φ_3 , Φ_6 и Φ_7 . Это свидетельствует о том, что, кроме хорошего совпадения по отдельным исследуемым критериям, имеет место правильное воспроизведение характера колебаний в этой зоне.

Специалисты определили, что решение α_{id}^{185} хорошо отражает физическую суть процессов, протекающих в станке в области низких частот. В окрестности указанного решения проведено исследование на устойчивость относительно изменения параметров, показывающее, что решение α_{id}^{185} устойчиво. Построен параллелепипед в соответствии с допусками на параметры с центром α_{id}^{185} и проведены $N = 256$ испытаний, чего вполне достаточно для столь небольшого объема. Все векторы оказались допустимыми, а значения критериев мало изменялись.

Для определения области допустимой вариации параметров проанализированы параметры адекватных векторов в параллелепипедах Π^5 и Π^6 и на D_α построен параллелепипед для решения задачи оптимизации.

Основные результаты решения задачи

1. Поставлена и решена задача векторной идентификации параметров долбежного станка с тяговым усилием 30 кН по восьми критериям адекватности: частотным, формам колебаний, виброперемещениям в зоне резания и критериям статики. В задаче идентифицировались жесткостные параметры стыков и соединений станка.

2. Определены границы вариаций параметров. Несмотря на то, что до решения задачи эти границы были в достаточной степени неопределенными, путем пятикратной коррекции удалось найти такие значения этих границ, которые обеспечивают решение задачи векторной идентификации.

3. Найдено множество адекватных векторов.

4. По множеству критериев адекватности идентифицирован вектор α_{id}^{185} , для которого характерны: а) низкая жесткость стыка станин, определяющая потерю виброустойчивости станка в низкочастотном диапазоне; б) преимущественное влияние колебаний стойки на величину виброперемещений между инструментом и деталью. С точки зрения специалистов, найденное решение α_{id}^{185} правильно отражает характер колебаний в зоне резания и хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований.

5. Решение задачи векторной идентификации позволило объективно оценить качество математической модели станка с учетом критериев адекватности и на этом основании поставить и решить задачу оптимального проектирования по таким показателям, как устойчивость, точность обработки, ресурсы работы гидропривода, долбляка и инструмента, металлоемкость, приведенные затраты. В результате исследований были найдены конструктивные пути совершенствования станка [48, 95, 133].

7.5. Векторная идентификация параметров шпиндельного узла и его доводка

Точность обработки, надежность и виброустойчивость металлорежущих станков в значительной мере зависят от характеристик шпиндельных узлов. С повышением требований к точности станков возрастает роль динамических и температурных перемещений шпиндельных узлов в общем балансе точности станка. Это приводит к необходимости проведения их динамических и тепловых расчетов на этапе проектирования и доводки по результатам испытаний опытного образца. На этапе проектирования динамические и тепловые расчеты включают в себя определение частотных характеристик и температурного поля, на основании которых определяются динамические и температурные перемещения шпинделя. Точность расчетного определения частотных и тепловых характеристик шпиндельных узлов зависит от достоверности результатов информации о коэффициентах жесткости и демпфирования его опор и коэффициентах конвективного теплообмена поверхностей шпинделя и его корпуса с окружающей средой. Повышение достоверности результатов на этапе проектирования шпиндельных узлов, получаемых при оптимизации конструкции с помощью математических моделей, может быть достигнуто путем идентификации параметров моделей в процессе испытаний прототипа.

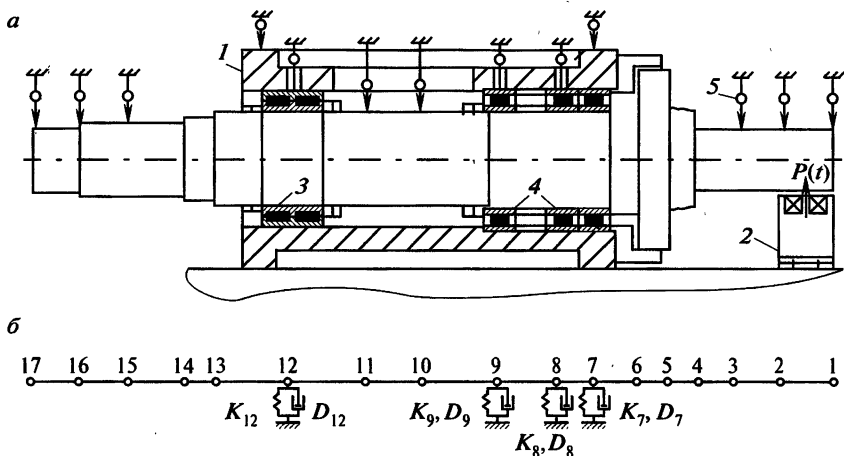


Рис. 7.6. Испытательный стенд:

(а) — схема эксперимента: 1 — корпус шпинделя, 2 — электромагнитный вибратор, 3 — роликоподшипник, 4 — шарикоподшипники, 5 — датчик; (б) — расчетная схема динамической модели с узлами 1—17

При этом процедура идентификации включает решение задач динамики и теплопроводности шпиндельных узлов.

Экспериментальные измерения динамических и температурных характеристик шпиндельного узла многоцелевого станка проводились на специальном испытательном стенде (рис. 7.6). Подробное описание натурного эксперимента приведено в работе [45].

Математические модели [44, 45, 135]. Динамическая модель шпиндельного узла представлена как линейная стержневая система с распределенной массой на сосредоточенных упруговязких опорах (рис. 7.6, б). Перемещение каждого поперечного сечения шпинделя имеет две компоненты: радиальное перемещение и угол наклона оси шпинделя в плоскости чертежа.

Динамические перемещения шпинделя описываются системой линейных дифференциальных уравнений в матричной форме

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [D] \cdot \{\dot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{P(t)\}, \quad (7.2)$$

где $[M]$ — матрица масс шпинделя (размерности $2n \times 2n$); $[D]$ — матрица коэффициентов демпфирования опор ($2n \times 2n$); $[K]$ — матрица коэффициентов жесткости и опор ($2n \times 2n$); $\{X\}$ — вектор динамических перемещений шпинделя ($2n$); $\{P(t)\}$ — вектор динамической нагрузки, создаваемой вибратором ($2n$); n — число узловых точек в расчетной схеме шпинделя.

Установившееся движение ищем в форме $\{X(t)\} = \{X_1\}e^{i\omega t}$. После подстановки в (7.2) определяем комплексные амплитуды вынужденных колебаний

$$\{X(i\omega)\} = ([K] - \omega^2 \cdot [M] + i\omega \cdot [D])^{-1} \cdot \{P_1\}. \quad (7.3)$$

Выражение (7.3) служит для расчетного определения частотной характеристики динамической системы шпинделя.

При разработке стержневой тепловой модели шпиндельного узла (рис. 7.7, б) принято, что основным источником теплообразования является процесс трения в опорах (рис. 7.7, а). Тепловое взаимодействие шпиндельного узла с окружающей средой учитывается посредством коэффициентов конвективного теплообмена с поверхностями шпинделя и его корпуса. Температурное поле шпиндельного узла гильзовой конструкции определяют при решении осесимметричной задачи теплопередачи. При этом приняты следующие допущения: тепло, выделенное подшипником, поровну распределяется между дорожками качения; тела качения и сепаратор рассматриваются как сплошное кольцо с определенными теплофизическими свойствами; тепловое сопротивление соединений не учитывается. Решение стационарной задачи теплопередачи посредством метода конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$[C] \cdot \{T\} = \{Q\}, \quad (7.4)$$

где $[C]$ — матрица теплопроводности шпиндельного узла ($n \times n$); $\{T\}$ и $\{Q\}$ — векторы узловых значений температуры и тепловой нагрузки соответственно (n); n — число узловых точек в расчетной схеме.

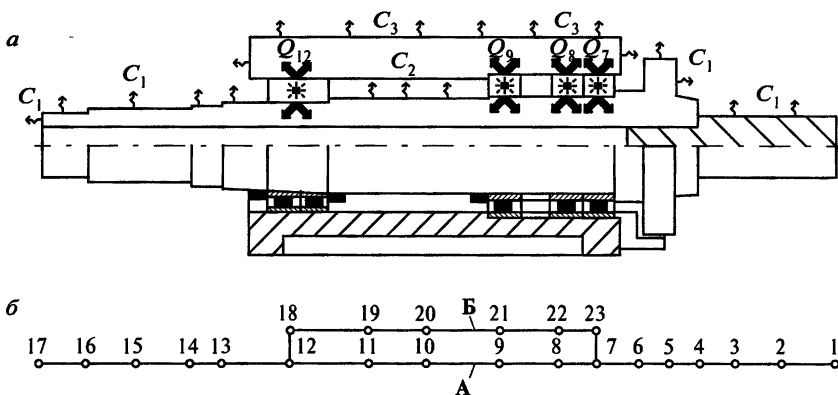


Рис. 7.7. Тепловая модель шпинделя:

(а) — температурное поле и тепловые потоки в опорах Q_7 , Q_8 , Q_9 , Q_{12} ; (б) — расчетная схема тепловой модели: А — шпиндель; Б — корпус шпинделя; 1—23 — узлы

Из системы (7.4) определяем вектор узловых температур

$$\{T\} = [C]^{-1} \cdot \{Q\}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) служит для расчетного определения температурного поля шпинделя; подробнее об этом см. с. 114, рис. 7.8.

Идентифицируемые параметры моделей. Идентифицируемыми параметрами динамической модели были значения коэффициентов жесткости K_7, K_8, K_9, K_{12} [Н/мм] и демпфирования опор D_7, D_8, D_9, D_{12} [Н·мм/с] (рис. 7.6, б). При решении задачи теплопередачи наибольшая неопределенность связана с определением условий теплового взаимодействия шпиндельного узла с окружающей средой. Поэтому идентифицируемыми параметрами являются значения коэффициентов конвективного теплообмена с открытой поверхности шпинделя C_1 ; с поверхности шпинделя между передней и задней опорами C_2 и с поверхности корпуса шпинделя C_3 (рис. 7.7, а). Значения коэффициентов даны в Вт/(м²·°С).

Критерии адекватности. На основании анализа статической упругой линии шпинделя и его первой формы колебаний (частота 345 Гц) был сформулирован набор из 13 критериев $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{13}$, определяющих статическое и динамическое поведение шпиндельного узла в области частот до 600 Гц. Соответствие тепловой модели шпиндельного узла и реального объекта оценивалось по значениям температуры в точках конструкции (критерии F_1-F_{23}). Всего использовались 36 критериев адекватности. Список экспериментальных значений критериев Φ_v^{exp} , $v = \overline{1, 13}$ и F_v^{exp} , $v = \overline{1, 23}$ представлен в табл. 7.6 и табл. 7.7. Амплитуды динамических перемещений относятся к первой резонансной частоте шпинделя. Критерии адекватности Φ_v , $v = \overline{1, 13}$, определяли как

$$\Phi_v^{**} = \left| \frac{\Phi_v^{\text{exp}} - \Phi_v^{\zeta}(\alpha^i)}{\Phi_v^{\text{exp}}} \right| \cdot 100\%,$$

где $\Phi_v^{\zeta}(\alpha^i)$ — расчетное значение критерия. По аналогии рассчитывались и критерии F_v^{**} , $v = \overline{1, 23}$. В практике станкостроения для исследуемых задач считаются допустимыми невязки до 20%.

Параметрические ограничения. Были сформулированы ограничения на жесткостные и демпфирующие параметры шпиндельных опор, учитывающие точность их изготовления и сборки, а также ограничения на параметры конвективного теплообмена с поверхностями шпиндельного узла.

Критерии адекватности Φ_v

Φ_v^{exp}	Физическое содержание критериев	Экспериментальное значение
Φ_1^{exp}	1-я резонансная частота [Гц]	345
Φ_2^{exp}	Статическое перемещение в узле 1 [мкм]	50
Φ_3^{exp}	Динамическое перемещение в узле 1 [мкм]	20
Φ_4^{exp}	Фаза колебаний в узле 1 [град.]	86
Φ_5^{exp}	Статическое перемещение в узле 3 [мкм]	27
Φ_6^{exp}	Динамическое перемещение в узле 3 [мкм]	9
Φ_7^{exp}	Фаза колебаний в узле 3 [град.]	79
Φ_8^{exp}	Статическое перемещение в узле 10 [мкм]	-7
Φ_9^{exp}	Динамическое перемещение в узле 10 [мкм]	5
Φ_{10}^{exp}	Фаза колебаний в узле 10 [град.]	-105
Φ_{11}^{exp}	Статическое перемещение в узле 15 [мкм]	2
Φ_{12}^{exp}	Динамическое перемещение в узле 15 [мкм]	8
Φ_{13}^{exp}	Фаза колебаний в узле 15 [град.]	128

Таблица 7.7

Критерии адекватности $F_v^{1)}$

F_v^{exp}	Температура в узлах, °С	F_v^{exp}	Температура в узлах, °С
F_1^{exp}	22	F_{13}^{exp}	23
F_2^{exp}	25	F_{14}^{exp}	22
F_3^{exp}	26	F_{15}^{exp}	21
F_4^{exp}	28	F_{16}^{exp}	21
F_5^{exp}	29	F_{17}^{exp}	21
F_6^{exp}	30	F_{18}^{exp}	37
F_7^{exp}	54	F_{19}^{exp}	33
F_8^{exp}	56	F_{20}^{exp}	32
F_9^{exp}	38	F_{21}^{exp}	34
F_{10}^{exp}	25	F_{22}^{exp}	36
F_{11}^{exp}	30	F_{23}^{exp}	36
F_{12}^{exp}	62	—	—

1) Здесь индекс v соответствует номеру узла, см. рис. 7.7, б.

Решение задач векторной идентификации и анализ результатов. В исходных параллелепипедах Π_1^1 и Π_2^1 (соответственно для динамической и тепловой моделей) проведено по 512 испытаний.

Результаты расчетов дали приемлемые величины невязок по статическим (5—10%) и динамическим (9—18%) критериям. Значительные величины невязок по температурным критериям (34—49%) вызвали сомнение в правильности задания границ вариации коэффициентов конвективного теплообмена в тепловой модели. Существенным, с точки зрения дальнейшей коррекции границ параллелепипеда Π_2^1 для тепловой модели, был анализ гистограмм¹⁾. Анализ показал существенное влияние условий теплоотдачи с поверхностей элементов шпиндельного узла на распределение и величину температурного поля.

По этой причине были проанализированы и уточнены величины коэффициентов теплообмена с учетом естественного обдува поверхностей шпинделя при его вращении. Таким образом, были уточнены значения коэффициентов теплообмена и определены границы нового параллелепипеда Π_2^2 для тепловой модели. После коррекции коэффициентов теплообмена невязки по температурным критериям не превосходили 19%. При значениях всех критериев адекватности, не превышающих 20%, были определены допустимые множества D_α для динамической и тепловой моделей, состоящие из четырех и шести векторов соответственно. В результате анализа лучшими признаны векторы α_{id}^{41} для динамической и α_{id}^{90} для тепловой моделей. Назовем причины выбора данных векторов.

■ Для вектора α_{id}^{41} характерны наименьшие невязки по статическому Φ_2 (6%) и динамическому Φ_3 (11%) перемещениям на переднем конце шпинделя в первом узле. Известно, что перемещения переднего конца шпинделя оказывают наибольшее влияние на точность обработки.

■ Вектор α_{id}^{90} наиболее правильно отражает тепловое состояние шпиндельного узла в зоне опор (невязки по значениям температуры не превышают 13%), что имеет важное практическое значение для правильного выбора типа смазки. Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными показало хорошее совпадение (рис. 7.8).

В окрестностях идентифицированных векторов проведены исследования на устойчивость полученных решений относительно малых изменений параметров. С этой целью построены параллелепипеды

¹⁾ О гистограммах см. [134, 140].

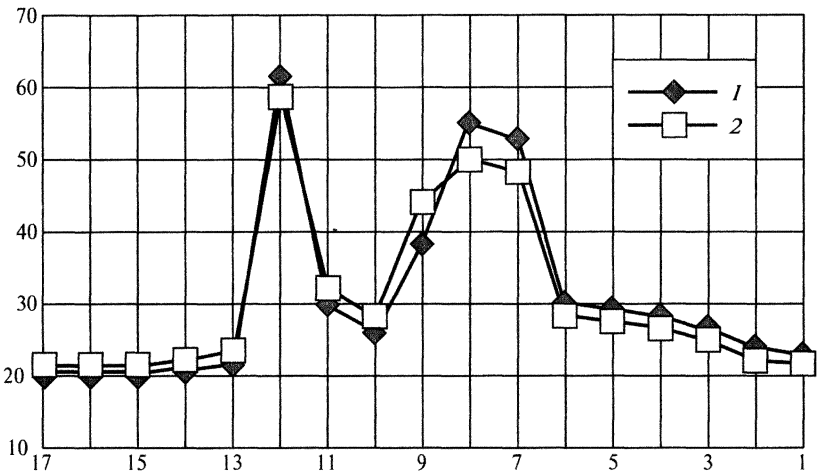


Рис. 7.8. Температурное поле шпинделя.

По горизонтали — номера узлов на оси шпинделя, по вертикали — температура (°C). Линии 1 и 2 соответствуют натурному эксперименту и расчету на основе математической модели

с центрами α_{id}^{41} и α_{id}^{90} и выполнены 128 испытаний. При этом значения критериев мало изменялись, что свидетельствует об устойчивости полученных решений. Таким образом, имея достоверные математические модели, можно перейти к следующему этапу — доводке опытного образца шпиндельного узла по критериям качества.

Решение задач оптимизации по критериям качества. Для определения области допустимой вариации параметров были проанализированы параметры адекватных векторов и на D_α построены параллелепипеды $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_1 \subseteq \Pi_1^1$ и $\bar{\Pi}_2, \bar{\Pi}_2 \subseteq \Pi_2^2$, соответственно для динамической и тепловой моделей. Минимизировались шесть критериев $\Phi_2, \Phi_3, F_7, F_8, F_9$ и F_{13} (см. табл. 7.6, табл. 7.7). В качестве варьируемых параметров приняты четыре коэффициента жесткости опор K_7, K_8, K_9 и K_{12} и три коэффициента теплоотдачи C_1, C_2 и C_3 . В параллелепипедах $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}_2$ проведено по 256 испытаний.

Допустимое множество и множество Парето были построены для каждой из задач. В первой задаче в узле 1 были уменьшены статические и динамические перемещения соответственно на 6% и 8%. Во второй задаче предпочтение отдано проекту, характеристики которого близки к прототипу по температурными критериями в узлах 7—9 и 12, но превосходят его по статической и динамической жесткости на 8%

и 12,5% соответственно. Практическая реализация оптимальных значений жесткостей подшипников осуществлялась путем регулирования предварительного натяга в опорах шпиндельного узла. В дальнейшем была проведена экспериментальная проверка результатов доводки опытного образца шпиндельного узла с оптимальными значениями параметров. Она подтвердила (в пределах погрешностей измерения) достоверность полученных результатов.

Решение задач векторной идентификации позволило объективно оценить качество математических моделей шпиндельного узла по всем основным критериям близости и на основании этой оценки поставить и решить задачу оптимального проектирования шпиндельного узла по статическим, динамическим и температурным критериям.

8

Многокритериальное проектирование регулируемых систем. Большие системы

В этом разделе мы рассмотрим несколько задач, достаточно трудных в смысле поиска оптимальных решений. С подобными многокритериальными работами приходится сталкиваться на практике. Мы рассматриваем применение метода ИПП как первый шаг в исследовании этих задач.

8.1. Общая постановка задачи проектирования регулируемых систем

Эффективность функционирования сложных технических систем (автомобиль, самолет или их двигатели) в основном определяется степенью совершенства проекта системы и качеством управления ее регулируемыми элементами в конкретных условиях эксплуатации. Традиционный подход к созданию регулируемых технических систем состоит в последовательном решении двух рассматриваемых независимо друг от друга задач оптимального проектирования и оптимального управления. При этом на этапе проектирования требования к эффективности систем автоматического управления, как правило, не учитываются. Такая идеология находит свое отражение даже в структурном построении организаций, занимающихся созданием сложных технических систем, когда одни подразделения решают задачи проектирования, другие — управления. В данной ситуации при определении оптимальных законов управления конструктору приходится иметь дело с жестко заданным набором конструктивных параметров, что существенно снижает возможности по повышению эффективности функционирования объекта. Фактически результаты оптимального проектирования представляют собой исходные данные для задач оптимального управления и, следовательно, являются определяющими как с точки зрения результативности собственно управления, так и с точки зрения итоговой эффективности регулируемой системы, что представляет собой конечную цель процесса проектирования. Таким образом, вполне естественным является объединение этих двух задач для одновременного определения оптимальных конструктивных па-

раметров и формулирования оптимальных законов управления в рамках решения одной задачи *оптимального проектирования регулируемых систем*.

Отметим существенное обстоятельство, которое необходимо принимать во внимание при указанных исследованиях. Задачи оптимального проектирования и задачи оптимального управления являются по своей сути многокритериальными задачами, в результате решения которых должно определяться множество Парето-оптимальных проектов и наборов законов управления регулируемыми элементами технической системы. Обоснованный выбор окончательного варианта вектора конструктивных (нерегулируемых) параметров и набора законов управления можно осуществить лишь на основе анализа возможных компромиссов между противоречивыми показателями эффективности. В этих условиях попытки решения рассматриваемой проблемы путем ее сведения каким-либо образом к задаче однокритериальной оптимизации являются совершенно неоправданными, поскольку приводят к потере значительного подмножества перспективных технических решений [121].

Далее мы рассмотрим один из возможных подходов к решению проблемы многокритериального проектирования регулируемых технических систем. Эффективность данного подхода демонстрируется на примере поиска оптимальных конструктивных параметров и законов управления многоступенчатого осевого компрессора авиационного газотурбинного двигателя [39, 40, 121, 133, 135].

Постановка задачи. Пусть имеется техническая система, эффективность которой может быть оценена некоторым набором локальных критериев качества Φ_v , $v = 1, \dots, k$. Важно подчеркнуть, что этот набор критериев включает в себя как локальные критерии «чистого» проектирования Φ_{dv} , $v = 1, \dots, k_1$ (масса, жесткость, запасы прочности конструкции, коэффициенты полезного действия на различных режимах работы и т. д.), так и локальные критерии управления Φ_{cv} , $v = k_1 + 1, \dots, k$, одни из которых могут совпадать с критериями проектирования (коэффициенты полезного действия системы на различных режимах работы), а другие отражают особенности управления (время перехода с одного режима работы на другой, показатели устойчивости управления, энергозатраты на управление и т. д.).

Эффективность технической системы определяется набором конструктивных параметров $\alpha_d = (\alpha_{d1}, \dots, \alpha_{dp})$ и набором законов управления $u = (u_1, \dots, u_z)$, где z — количество регулируемых элементов. Законы управления, как правило, являются функциями времени t и

некоторых режимных параметров $w_i, i = 1, \dots, q$, характеризующих режим работы рассматриваемой системы, т. е. $u = f(t, w_i)$. Количественный и качественный состав режимных параметров индивидуален для каждой технической системы. Например, для авиационного газотурбинного двигателя такими параметрами являются: положение рычага управления двигателем, приведенные частоты вращения роторов n_r , давление, температура и влажность атмосферного воздуха, число Маха. Для заданной совокупности целей управления можно определить вектор управления по набору параметров управления $\alpha_c = (\alpha_{c1}, \dots, \alpha_{cm})$, которые представляют собой коэффициенты, входящие в зависимость¹⁾ $u = f(t, w_i)$. Тогда любой локальный критерий технической системы может быть представлен в виде функции от вектора конструктивных параметров α_d и вектора параметров управления α_c : $\Phi_v = \Phi_v(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_d, \alpha_c)$.

Важно подчеркнуть принципиальное отличие параметров проектирования от параметров управления. Параметры проектирования в большинстве случаев представляют собой геометрические размеры отдельных деталей, составляющих техническую систему, которые не могут целенаправленно изменяться в процессе эксплуатации (изменение параметров за счет механического износа или ремонта системы не рассматривается). Параметры управления в современных технических системах могут быть реализованы в виде базы данных, хранимых в памяти компьютера. Следовательно, существует принципиальная возможность реализации множества наборов законов управления, каждый из которых выбирается в зависимости от особенностей конкретной задачи, решаемой системой.

При быстром переводе газотурбинного двигателя с минимального на максимальный режим работы (приемистость) возникает эффект *заброса*, т. е. превышения температуры газа по отношению к стационарным значениям, что отрицательно сказывается на долговечности лопаток турбины. Противоречие между временем приемистости и величиной заброса температуры можно разрешить путем выбора соответствующих законов управления регулируемыми элементами. Причем для одних условий (при достаточной высоте и скорости полета) более важным может оказаться снижение заброса температуры, а при других (уход на второй круг при посадке) чрезвычайно важно обеспечить минимальное время. В этих условиях возникает необходимость определения множества Парето-оптимальных законов управления

¹⁾ Здесь не ставилась цель проанализировать многообразие возможных законов управления технической системой для стационарных и нестационарных режимов.

(в виде множества векторов параметров управления), которые должны реализовываться на бортовых компьютерах.

При традиционном подходе к оптимизации регулируемых систем в конечном счете определяются один вектор конструктивных параметров α_d (проект системы) и соответствующий ему один вектор параметров управления α_c (набор законов управления). Такой подход далеко не всегда позволяет выявить все потенциальные возможности повышения эффективности систем с регулируемыми параметрами.

Многокритериальный подход к оптимизации параметров регулируемых систем [39, 40] состоит в том, чтобы при фиксированном наборе конструктивных параметров α_d иметь не один, а *множество векторов параметров управления*. Эти векторы таковы, что для одной цели управления (на одном режиме работы) один из них определяет оптимальный набор законов управления, для другой цели — другой и т. д. При этом бортовой компьютер, в памяти которого находятся все векторы параметров управления, имеет возможность выбирать тот или иной вектор (набор законов управления) в соответствии с задаваемой целью управления и тем самым осуществлять оптимальное управление. Для реализации такого подхода прежде всего необходимо построить допустимое множество решений $\alpha = (\alpha_d, \alpha_{ci}) \subseteq \bar{D}$, $i = 1, \dots, p_\alpha$, где каждому проекту (вектору конструктивных параметров α_d) соответствует p_α наборов законов управления (векторов параметров управления α_{ci}). Далее необходимо определить множество Парето-оптимальных проектов $\bar{P} \subseteq \bar{D}$ и из этого множества выбрать наиболее предпочтительное с точки зрения специалистов решение $\alpha^0 = (\alpha_d^0, \alpha_{ci}^0) \subseteq \bar{P}$, $i = 1, \dots, p_\alpha$. Однако в задачах большой размерности, когда число варьируемых параметров достигает многих десятков, построить допустимое множество решений \bar{D} чрезвычайно сложно. Поэтому при решении практических задач предлагается следующая последовательность действий.

Этап 1. Определить допустимое множество D , состоящее из векторов конструктивных параметров и параметров управления $\alpha = (\alpha_d, \alpha_c)$. В результате каждому допустимому проекту α_d соответствует только один набор законов управления (вектор параметров управления α_c).

Этап 2. Для оценки предельных возможностей системы необходимо для каждого из ранее полученных допустимых вариантов D решить многокритериальную задачу оптимизации параметров управления по критериям управления Φ_{cv} , $v = k_1 + 1, \dots, k$. Иными словами, для каждого допустимого решения (при фиксированных значениях

векторов α_d , варьируя только параметры α_c) определить векторы $\alpha = (\alpha_d, \alpha_c) \subseteq \bar{D}$, для которых каждому проекту системы α_d соответствует p_α Парето-оптимальных наборов законов управления. Далее необходимо определить множество Парето-оптимальных проектов $\bar{P} \subseteq \bar{D}$.

Этап 3. По результатам анализа множества \bar{P} осуществляется выбор наиболее предпочтительного решения $\alpha^0 = (\alpha_d^0, \alpha_c^0) \subseteq \bar{P}$, $i = 1, \dots, p_{\alpha^0}$.

В общем случае с учетом высокой размерности пространства варьируемых параметров построение множества \bar{D} предполагает проведение достаточно большого вычислительного эксперимента. При отсутствии такой возможности зачастую избирают иной путь. На этапе 1 из множества Парето-оптимальных решений $P \subseteq D$ отбирают некоторое подмножество наиболее приемлемых с точки зрения специалистов векторов $\alpha^j = (\alpha_d^j, \alpha_c^j)$. Затем для каждого из выбранных проектов α_d^j в соответствии с этапом 2 решают многокритериальную задачу управления. Именно такой путь был использован в работах [39, 40] при решении задачи оптимального газодинамического проектирования четырехступенчатого осевого компрессора для авиационного газотурбинного двигателя. Рассмотрим эту задачу.

8.2. Оптимальное проектирование осевого компрессора

Многоступенчатый осевой компрессор предназначен для повышения давления рабочего тела в авиационных или наземных энергетических установках. Схема проточной части исследуемого компрессора показана на рис. 8.1. Каждая ступень компрессора состоит из двух лопаточных венцов: венца лопаток рабочего колеса РК, образуемого вращающимися лопатками, и венца направляющих аппаратов НА, образуемого неподвижными лопатками.

Каждая лопатка имеет сложную пространственную форму, пример которой для лопатки рабочего колеса представлен на рис. 8.2 (штриховой линией показано возможное изменение формы лопатки при изменении конструктивных параметров). Форма лопаток определяется набором конструктивных параметров и не может целенаправленно изменяться в процессе эксплуатации. В то же время у данного комп-

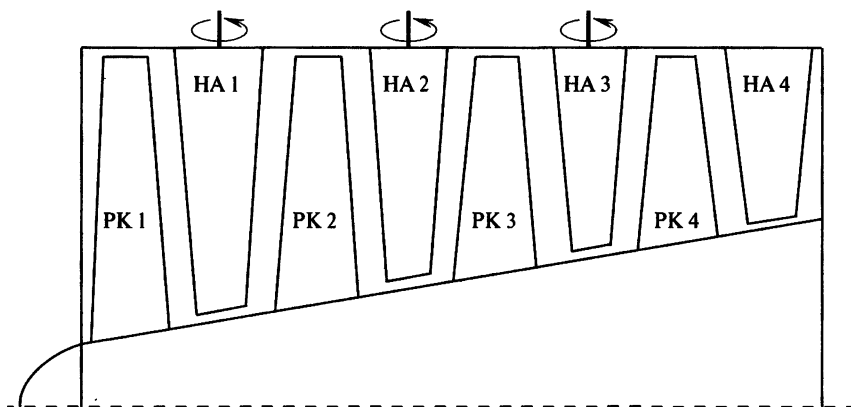


Рис. 8.1. Схема проточной части компрессора

рессора лопатки направляющих аппаратов первых трех ступеней могут поворачиваться вокруг своей оси, и, следовательно, существует возможность управления углами их поворота при изменении режима работы. Режим работы компрессора характеризуется приведенной частотой вращения $n_r = n \cdot \sqrt{288/T_{in}}$, где n — физическая частота вращения, отнесенная к значению на максимальном режиме, T_{in} — температура воздуха на входе. Газодинамическая эффективность компрессора характеризуется заданными зависимостями расхода воздуха $G(n_r)$ и степени повышения полного давления $\pi(n_r)$ от режима работы, а также коэффициентом полезного действия (КПД) компрессора $\eta(n_r)$, который необходимо максимизировать, и запасом газодинамической устойчивости, который ограничен снизу.

Традиционный подход к проектированию регулируемых компрессоров состоит в определении оптимальных конструктивных параметров на расчетном режиме работы ($n_r = 1,0$) и последующем определении одного набора законов управления для повышения КПД на других режимах работы. Однако существует немало таких областей применения многоступенчатых осевых компрессоров (двигатели для многорежимных летательных аппаратов), где возникает необходимость учета изменения их характеристик на нерасчетных режимах работы уже на стадии проектирования.

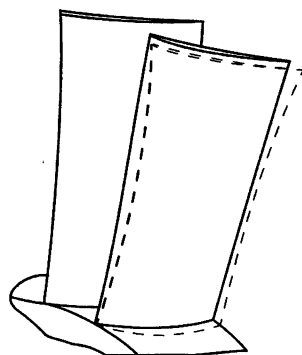


Рис. 8.2. Лопатка рабочего колеса

В рамках настоящей работы задача оптимального проектирования регулируемого компрессора рассматривается как задача доводки существующего проекта, или задача улучшения прототипа.

Законы управления углами поворота первых трех направляющих аппаратов искались в виде линейных функций от n_r (такой подход сегодня является наиболее распространенным) и $\alpha_c = (\alpha_{c1}, \dots, \alpha_{c6})$.

Варьируемые параметры. Рассматривались конструктивные углы на входе и выходе из лопаток всех рабочих колес и первых трех направляющих аппаратов в трех сечениях по радиусу $\alpha_d = (\alpha_{c1}, \dots, \alpha_{c42})$ и параметры управления $\alpha_c = (\alpha_{c1}, \dots, \alpha_{c6})$. На этапе 1 варьировалось 48 параметров.

Критерии оптимизации. Рассматривались отклонения значений КПД компрессора на четырех режимах работы от соответствующих значений компрессора-прототипа для значений n_r , равных 1,0; 0,9; 0,8; 0,7, т. е. $(\Phi_v(\alpha) = [\eta_v(\alpha) - \eta_v^p], v = \overline{1,4}) \rightarrow \max$, где η_v^p — КПД компрессора-прототипа на v -м режиме.

Функциональные ограничения. Их роль заключалась в обеспечении заданного расхода воздуха, заданной степени повышения давления с точностью до 1% и запаса газодинамической устойчивости не ниже заданного.

Математическая модель. В работе использовалась модель компрессора в двумерной осесимметричной постановке, позволяющая обеспечить погрешность расчета основных газодинамических характеристик в рассматриваемом диапазоне режимов работы менее 0,5%.

Решение задачи. К числу особенностей проблемы относится, прежде всего, необходимость решения многокритериальной задачи оптимизации конструктивных параметров и законов управления регулируемыми элементами, размерность которой достаточно велика (48 варьируемых параметров), и серии задач оптимального управления меньшей размерности (6 параметров). Следующей особенностью является сложность корректного задания начального диапазона поиска (параллелепипеда Π). Задача решалась в соответствии с приведенными в пункте 8.1 этапами 1—3. Были отобраны три перспективных проекта для дальнейших исследований. Затем при фиксированных конструктивных параметрах указанных проектов варьировались

б параметров управления¹⁾. Найдены для трех проектов соответственно 50, 49 и 50 наборов Парето-оптимальных законов управления. В результате решения задачи для исходного проекта (прототипа) компрессора были найдены широкие возможности по обеспечению различных значений КПД на разных режимах работы.

Анализ полученных результатов показал, что

- (1) для каждого из выбранных проектов существует множество альтернативных наборов законов управления;
- (2) конструктивные параметры оказывают решающее влияние на значения КПД компрессора на различных режимах работы при его регулировании.

Это подтверждает обоснованность принятой стратегии оптимизации регулируемого многоступенчатого осевого компрессора.

В табл. 8.1 приведены значения критериев оптимизации на разных режимах работы для четырех наборов Парето-оптимальных законов управления, соответствующих одному из лучших проектов. Подчеркнуты предельно достижимые (для выбранного проекта) значения критериев, которые могут быть обеспечены в случае реализации на компрессоре этих законов управления. Заметим, что для одного набора конструктивных параметров существует множество принципиально различных наборов законов управления, обеспечивающих различные степени компромисса между КПД компрессора на разных режимах, а применение многокритериального управления позволяет значительно повысить эффективность компрессора во всем диапазоне режимов работы.

Таблица 8.1

Значения КПД компрессора на разных режимах, %

Парето-оптимальные решения	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
1	<u>0,048</u>	0,54	0,908	1,315
2	-0,001	0,872	0,789	0,711
3	-0,006	0,628	1,224	<u>2,212</u>
4	-0,217	<u>0,922</u>	<u>1,34</u>	1,292
Оптимальное управление	0,048	0,922	1,34	2,212

Выводы. Оптимальное проектирование регулируемых технических систем целесообразно осуществлять в рамках единой стратегии, вклю-

¹⁾ Коррекция исходных границ вариации параметров в задачах оптимизации конструктивных параметров и параметров управления выполнялась на основании анализа таблиц испытаний, гистограмм и таблиц допустимых решений (см. [134, 140]).

чающей в себя многокритериальную оптимизацию конструктивных параметров и законов управления одновременно, а также многокритериальную оптимизацию законов управления для полученной на первом этапе совокупности наиболее предпочтительных проектов.

Описанный подход — многокритериальное проектирование регулируемых систем — позволяет реализовать предельные возможности по повышению эффективности сложных технических систем как за счет выбора наиболее предпочтительных проектов из полученного допустимого множества, так и за счет реализации на *бортовом компьютере* множества наборов законов управления, оптимальных для различных целей и режимов эксплуатации.

В работах [49, 135] рассмотрен описанный выше подход к выбору нерегулируемых и регулируемых оптимальных параметров антропоморфного робота типа PUMA.

8.3. Многокритериальная оптимизация больших систем

Большая система состоит из подсистем. Например, грузовой автомобиль можно «расщепить» на такие подсистемы: рама, кузов, двигатель, трансмиссия, система управления. Оптимизировать *в лоб* такую систему в целом чаще всего не представляется возможным. Количество варьируемых параметров в этих системах может достигать многих тысяч, а время расчета одного вектора критериев при фиксированных значениях параметров, например, в системах, содержащих конечно-элементные модели, может исчисляться многими часами. Поэтому — даже при наличии самых современных компьютеров — трудно говорить об оптимизации подобных систем. Часто подразделения, участвующие в создании машины, оптимизируют *свою* подсистему, невзирая на другие. Собранная из *автономно-оптимальных* подсистем, машина оказывается далекой от совершенства [17, 94, 95, 98, 133, 135, 136].

Машина — единый организм, и улучшая одну из подсистем, мы тем самым можем непреднамеренно ухудшать работу других. Одной из основных целей оптимизации параметров больших систем является определение требований к ее подсистемам, исходя из интересов системы в целом. Большие системы чаще всего являются иерархически согласованными структурами. На верхнем уровне формулируется вектор критериев системы в целом, в то же самое время подсистемы имеют свои векторы критериев. В связи с этим напрашивается идея: большую систему *декомпозировать* на подсистемы, которые можно

оптимизировать, а затем *агрегировать* (собрать) результаты оптимизации, чтобы получить оптимальное решение для всей системы. Все это должно позволить определить такие требования к подсистемам, чтобы машина в целом была оптимальной. Различные схемы декомпозиции и агрегирования больших систем описаны в работах [94, 133, 135]. Мы рассмотрим одну из них, когда сравнительно небольшое число вариантов расчета векторов критериев для системы в целом представляется возможным выполнить. В результате оптимизации декомпозированных подсистем получаем для каждой из них свое псевдодопустимое множество, которое, как правило, несколько больше, чем истинное допустимое множество. В процессе оптимизации определяются их критериальные и параметрические ограничения, исходя из интересов системы в целом. В дальнейшем согласуются все векторы псевдодопустимых решений последовательно с более низкого уровня к более высокому. После получения таких агрегированных векторов параметров на верхнем уровне на основании расчета системы в целом определяются истинные значения допустимых векторов критериев системы. Пример, приведенный в пункте 8.4, демонстрирует сказанное. В пункте 8.5 приводятся результаты исследования многокритериальных и многопараметрических задач в параллельном режиме. Эти результаты делают возможным исследование ряда больших систем без их декомпозиции на подсистемы.

8.4. Построение согласованных решений

Серийно выпускаемые автомобили должны удовлетворять требованиям надежности, безопасности, уровню шумов и т. д. Например, существуют различные нормативы на испытания автомобиля на удар. По этим нормам требуется, чтобы корпус автомобиля в процессе натурных испытаний не имел повреждений при ударе по нему бойка, движущегося со скоростью 8,9 км/ч в горизонтальной плоскости под углом 30° к продольной оси автомобиля на высоте 508 мм от поверхности Земли. В этих испытаниях масса бойка 1 равна массе автомобиля. На рис. 8.3, б представлен рассматриваемый узел, который состоит из пластмассового бампера 2 , вкладыша 4 , выполненного из пенополиуретана, и задней панели 3 корпуса автомобиля. Проведенные на заводе экспериментальные исследования показали несовершенства конструкции: при боковом ударе происходит разрушение бампера и образование вмятин на корпусе автомобиля. Поэтому необходимо попытаться улучшить прототип или исходный базовый вариант конструкции и дать такие рекомендации, которые гарантировали бы

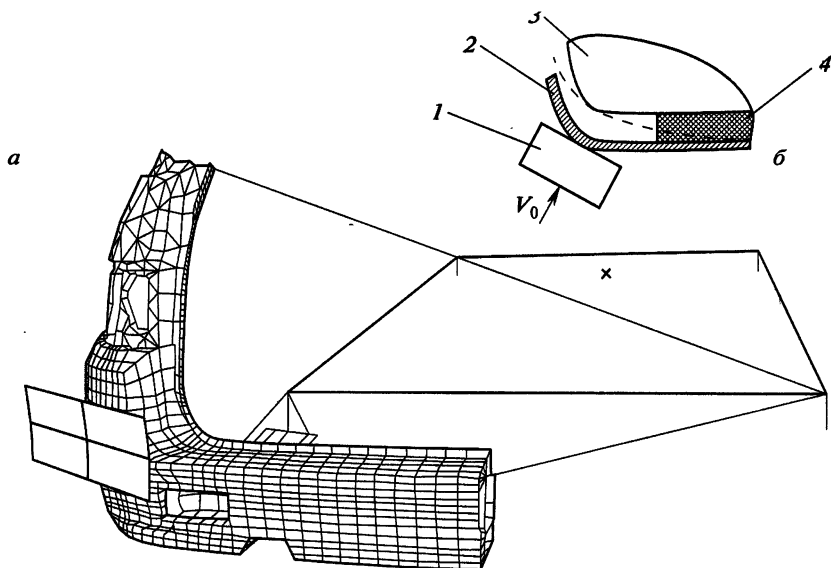


Рис. 8.3. Общий вид конструкции:

(а) — конечно-элементная модель; (б) — схема контактного взаимодействия тел при ударе: 1 — боек; 2 — бампер; 3 — задняя панель; 4 — вкладыш

неповреждаемость корпуса автомобиля, а также найти оптимальный вариант данного узла.

В рассматриваемой задаче о боковом ударе автомобиля должны быть учтены следующие факторы:

- большие деформации и возможность потери устойчивости конструкции;
- контактное взаимодействие тел с переменной границей контакта на двух парах соприкасающихся поверхностей — боек 1 с бампером 2 и бампер 2 с корпусом автомобиля 3 (рис. 8.3, б);
- переход нагруженных частей конструкции в пластическое состояние, возникновение трещин и разрушение материала.

На рис. 8.3, б штриховой линией показана схема контакта бампера с задней панелью.

В расчете рассматривалась левая половина заднего бампера и задней панели автомобиля (рис. 8.3, а). На этом рисунке условно показан контакт бойка с бампером. Остальная часть автомобиля моделировалась балочными элементами. Конструкция представлена конечно-элементной моделью, состоящей из 2016 элементов и 1986 узлов. Разовый расчет вектора оптимизируемых критериев при фиксированных значениях параметров для указанной модели занял около

15 часов. При таких затратах компьютерного времени оптимизация параметров системы в целом нереальна.

В результате решения контактной задачи были определены силы взаимодействия в области контакта бойка с бампером и деформированного бампера с задней панелью. Определены:

- зависимость от времени силы реакции в зоне контакта между бойком и бампером;
- зависимость от времени силы реакции в зоне контакта между деформированным бампером и задней панелью;
- изменение энергии системы с учетом диссипации.

Время удара, в течение которого деформации нарастают, можно разделить на две фазы: до начала контакта бампера с задней панелью ($\sim 2,7 \cdot 10^{-2}$ с) и после его начала. Во время первой фазы в контакте с бойком оказывается только бампер, при этом сила контактного взаимодействия бампера с задней панелью равна нулю. Здесь вследствие слабого сопротивления пластмассы (низкий модуль упругости) происходит незначительное изменение энергии. К началу второй фазы бампер перестает нести нагрузку из-за его разрушения. Разрушение учитывается в нелинейной модели материала бампера. Во время второй фазы в контакт вступает задняя панель, при этом за счет необратимых пластических деформаций происходит рост потерь энергии.

Выполненные исследования [17] показали возможность декомпозиции конечно-элементной модели на две подсистемы: первая описывает взаимодействие бойка с бампером, вторая — взаимодействие деформированного бампера с задней панелью. Вторую подсистему можно определить как описывающую взаимодействие бойка с задней панелью после разрушения бампера.

Постановка и решение задачи улучшения прототипа. Сформулируем критерии качества для всей системы в целом:

- конструкция должна иметь минимальную массу, т. е.

$$\Phi_1(\alpha) \rightarrow \min;$$

- остаточные деформации корпуса автомобиля после удара должны быть минимальными, т. е.

$$\Phi_v(\alpha) \rightarrow \min, v = \overline{2, 10}.$$

Здесь α — вектор варьируемых параметров бампера и задней панели корпуса, $\Phi_v(\alpha)$ — остаточные деформации контролируемых точек, полученные на основании расчета системы в целом. В качестве этих точек взяты узлы конечно-элементной сетки, к которым приведена

внешняя нагрузка, их число равно девяти. Всего имеем десять критериев качества.

Введем в рассмотрение критерии качества подсистем и установим их взаимосвязи с критериями большой системы.

Зададим на уровне подсистем следующие критерии качества.

■ Для *бампера*: $\Phi_1^1(\alpha)$ — его масса, $\Phi_2^1(\alpha)$ — критерий, характеризующий потенциальную энергию деформирования бампера. Здесь α — вектор варьируемых параметров бампера.

■ Увеличение энергии деформирования бампера приводит к уменьшению остаточных деформаций *задней панели*. Для задней панели: $\Phi_7^2(\alpha)$ — ее масса, $\Phi_2^2(\alpha), \dots, \Phi_{10}^2(\alpha)$ — остаточные деформации контактируемых точек. Здесь α — вектор варьируемых параметров панели.

Очевидно, что $\Phi_1 = \Phi_1^1 + \Phi_1^2$. Критерий Φ_2^1 необходимо максимизировать, остальные критерии — минимизировать.

В рамках параметрической оптимизации исследовались возможности улучшения прототипа (бампер с пятью ребрами жесткости), а именно рассчитывались критерии для бампера и задней панели. Расчеты показали, что допустимое множество пусто: не представлялось возможным выполнить условие

$$\Phi_v^2(\alpha) \leq 1 \text{ мм}, \quad v = \overline{2, 10}.$$

Структурная оптимизация бампера на основании анализа первой подсистемы. С увеличением силы реакции в первой фазе возрастает количество кинетической энергии боя, поглощаемой бампером до его взаимодействия с задней панелью. Для определения энергии деформирования бампера зададим перемещения тех его узловых точек, в которых происходит взаимодействие с бойком. Возникающие при таких перемещениях внутренние силы совершают работу, которая характеризует поглощающие свойства бампера.

В рамках параметрической оптимизации было выяснено, что необходимо усилить конструкцию прототипа. Для этого есть две возможности: введение дополнительных ребер жесткости и применение материалов с лучшими жесткостными характеристиками.

Введем в конструкцию дополнительные ребра жесткости, оставляя при этом материалы неизменными. Были рассмотрены три наиболее перспективных варианта расположения ребер жесткости. В рамках каждого варианта проводилась параметрическая оптимизация. Ниже приведены результаты, относящиеся к лучшей из трех конфигураций: бампер содержит 12 ребер жесткости, задняя панель — 6 ребер. Поми-

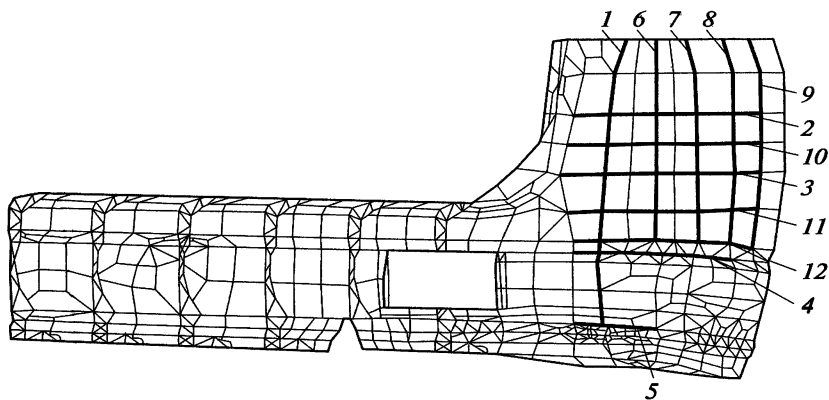


Рис. 8.4. Конечно-элементная модель оптимального варианта бампера

мо толщины оболочки (параметр α_1^1), варьировались также высоты ребер жесткости (параметры $\alpha_2^1, \dots, \alpha_{13}^1$). При анализе таблиц испытаний по сравнению с прототипом были немного ослаблены критериальные ограничения на массу бампера $\Phi_1^1(\alpha)$ и $\Phi_2^1(\alpha)$. Допустимое множество состояло из четырех решений: это векторы 126, 254, 257, 494, т. е. $\alpha^{126}, \alpha^{254}, \alpha^{257}, \alpha^{494}$ (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Допустимые решения

Векторы	Φ_1^1 [кГ]	Φ_2^1 [Н·м]
126	3,03	34,9
254	3,03	34,0
257	3,04	36,1
494	2,97	33,9

Конечно-элементная модель содержала 727 узлов и 950 элементов. На рис. 8.4 показаны 12 ребер жесткости для оптимальной конструкции бампера, тогда как у прототипа их было 5. По сравнению с прототипом добавились ребра с номерами от 6 до 12.

Оптимизация параметров задней панели корпуса на основании анализа второй подсистемы. Поиск согласованных решений. Вторая подсистема представляет ту часть конструкции, которая находится в зоне контактного взаимодействия бойка с задней панелью. Кинетическая энергия бойка к моменту его взаимодействия с задней панелью определяется из решения общей системы боек — бампер — задняя панель. Здесь каждому из допустимых вариантов бампера соответствует

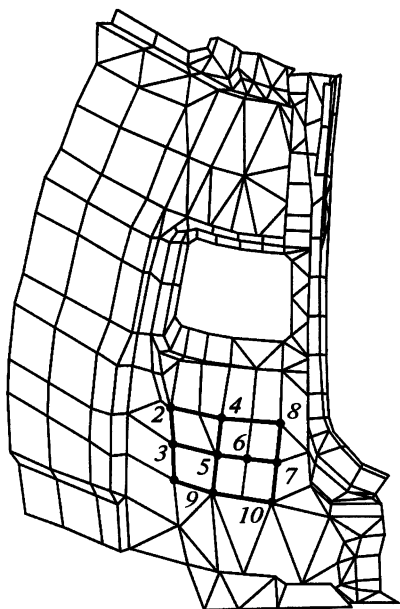


Рис. 8.5. Конечно-элементная модель задней панели

критериальным ограничениям $\Phi_v^2(\alpha) \leq 1$ мм, $v = 2, 10$ (табл. 8.3). Для этих векторов, так же как и для прототипа, $\Phi_1^2 \approx 2,72$ кг. В этой конструкции задней панели, как было отмечено, шесть ребер жесткости: три вертикальных и три горизонтальных. Они проходят через соответствующие узловые точки, показанные на рис. 8.5, где ребра жесткости выделены жирными линиями. В прототипе ребер жесткости не было. Значения остаточных деформаций в узловых точках 2–10 приведены в табл. 8.3. Значения $\Phi_2^2, \dots, \Phi_{10}^2$ даны для шести согласованных решений.

свое начальное значение кинетической энергии. Поэтому для каждого из указанных вариантов бампера необходимо рассматривать свои задачи оптимизации параметров задней панели. Помимо толщины задней панели α_1^2 варьировались также параметры ребер жесткости — их толщины $\alpha_2^2, \dots, \alpha_7^2$ и высоты горизонтальных ребер жесткости $\alpha_8^2, \alpha_9^2, \alpha_{10}^2$. В зависимости от высоты горизонтальных ребер автоматически строились вертикальные ребра. Конечно-элементная модель содержала 305 узлов и 340 элементов (рис. 8.5).

Для варианта бампера, соответствующего вектору 257, найдено шесть согласованных и допустимых вариантов панели, которые удовлетворяют указанным выше

Таблица 8.3

Остаточные деформации [мм]

Векторы	Φ_2^2	Φ_3^2	Φ_4^2	Φ_5^2	Φ_6^2	Φ_7^2	Φ_8^2	Φ_9^2	Φ_{10}^2
67	0,22	0,17	0,46	0,39	0,59	0,85	0,43	0,14	0,14
90	0,27	0,21	0,40	0,28	0,37	0,49	0,47	0,14	0,11
98	0,23	0,19	0,44	0,33	0,48	0,66	0,44	0,15	0,12
125	0,23	0,31	0,45	0,37	0,59	0,94	0,50	0,13	0,14
148	0,24	0,19	0,42	0,32	0,45	0,61	0,39	0,14	0,12
181	0,24	0,22	0,39	0,29	0,35	0,43	0,47	0,15	0,11

Поиск согласованных вариантов задней панели был проведен и для остальных трех допустимых вариантов бампера, соответствующих векторам 126, 254 и 494.

Агрегирование подсистем. Поиск оптимального решения. Операция агрегирования заключалась в следующем. Параметры каждого из допустимых вариантов бампера соединялись (стыковались) с параметрами каждого из соответствующих согласованных вариантов задней панели. Например, к вектору параметров бампера 257 приписывали параметры каждого из шести согласованных векторов задней панели. В результате образовывались векторы $(\alpha^{257}, \alpha^{67})$, $(\alpha^{257}, \alpha^{90})$, $(\alpha^{257}, \alpha^{98})$, $(\alpha^{257}, \alpha^{125})$, $(\alpha^{257}, \alpha^{148})$ и $(\alpha^{257}, \alpha^{181})$. Получилось шесть векторов параметров всей системы. Аналогичная операция была проведена и для векторов параметров бампера с номерами 126, 254 и 494. В итоге для всей системы было получено пятнадцать векторов параметров. С учетом критериального ограничения на массу всей конструкции число допустимых решений уменьшилось до девяти, из которых шесть приведены в табл. 8.3. Для каждого допустимого варианта были рассчитаны критерии всей системы $\Phi_v(\alpha)$, $v = \overline{1, 10}$. Установка дополнительных ребер жесткости привела к снижению остаточных деформаций, значения которых не превышали 1 мм. После проведения исследований предпочтение было отдано проекту, который включает в себя бампер (вариант 257) и заднюю панель (вариант 181). Здесь мы имеем более равномерное распределение остаточных деформаций по сравнению с другими вариантами, а также приемлемое значение массы. Описанный подход позволил значительно сократить время доводки конструкции. Добавим к сказанному, что речь шла о массовой продукции, так что эффект оптимизации здесь очевиден.

8.5. Многопараметрическая и многокритериальная оптимизация в параллельном режиме

В инженерных задачах, где расчет одного вектора критериев требует много компьютерного времени и (или) размерность вектора параметров достигает многих десятков, сотен и тысяч, часто не представляется возможным искать оптимальные решения. Это характерно и для больших систем, при исследовании которых зачастую возникают непреодолимые трудности декомпозиции систем на подсистемы [94]. Возможность решения подобных задач в параллельном режиме позволяет преодолевать указанные трудности и в ряде случаев искать опти-

мальные решения для больших систем непосредственно, без декомпозиции их на подсистемы [134].

Основная идея решения задачи в параллельном режиме заключается в следующем. Пусть требуется провести N испытаний и в нашем распоряжении имеется k компьютеров. На каждом из компьютеров проводим N/k испытаний и определяем свое допустимое множество решений. Далее строим объединенное множество допустимых векторов и на этом множестве определяем объединенное множество Парето-оптимальных решений. Каждое из таких решений имеет отметку, показывающую, на каком из компьютеров оно было получено. Таким образом, мы можем оценить вклад каждого компьютера в построение объединенного множества Парето-оптимальных решений.

Пример 8.1. Рассмотрим систему, содержащую 1000 варьируемых параметров. Вектор варьируемых параметров $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{1000})$, $1 \leq \alpha_i \leq 2$, $i = 1, \dots, 1000$.

Будем минимизировать следующие критерии качества $\Phi_v(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_1^{1000} \alpha_i, & \Phi_2 &= \sum_1^{1000} \alpha_i^2 - \sum_1^{299} \alpha_i^2, \\ \Phi_3 &= \left(1400 / \sum_{300}^{1000} \alpha_i^2\right) - \cos\left(\sum_1^{299} \alpha_i\right), & \Phi_4 &= \sum_1^{700} \frac{\alpha_i}{i} - \left(\sin\left(\sum_{701}^{1000} \alpha_i^2\right)\right)^5 \end{aligned}$$

при *a priori* критериальных ограничениях

$$\Phi_1 < 1502,2254, \quad \Phi_2 < 930,4528, \quad \Phi_3 < 0,1624, \quad \Phi_4 < 10,3851.$$

Ставилась задача провести 200 000 испытаний и определить допустимые и Парето-оптимальные решения. Для этих целей расчеты проводились одновременно на четырех компьютерах¹⁾ Intel Xeon с тактовой частотой 2,4 ГГц и объемом оперативной памяти 2 ГбТ на каждом по 50 000 испытаний. Параметры выбирались с помощью стандартного датчика случайных чисел.

Эксперимент. На первом компьютере получено 1110 допустимых решений, на втором — 1042, на третьем — 1075 и на четвертом — 1070. Время построения допустимого множества на каждом из компьютеров составило около 8 часов. Далее строилось объединенное допустимое множество, которое содержало 4297 решений. Затем на этом множестве определялось объединенное множество Парето-оптимальных решений, содержащее 326 векторов. Из них первому компьютеру принадлежало 84 Парето-оптимальных решений, второму — 78, третьему — 87 и четвертому — 77. Отношение найденных Парето-оптимальных решений к общему числу испытаний составляет $326/200\,000 = 0,00163$. Время решения всей задачи составило приблизительно 8,5 часа.

Выводы. Решение многокритериальных задач в параллельном режиме на основе метода ИПП позволяет проводить большое число испытаний (сотни тысяч и миллионы) и в конечном счете исследовать сложные системы, для которых построение и анализ допустимого множества решений до недавнего времени не представлялись возможными.

¹⁾ Решение задачи в параллельном режиме выполнено с помощью программы MOVI [134, 140].

У читателей, которые впервые узнают об ЛП_τ-последовательностях, часто возникают вопросы: что означает само название, в каком смысле говорят о равномерном расположении точек, сложно ли вычислять такие последовательности и др. В настоящем разделе кратко рассматриваются ответы на некоторые из этих вопросов. Лица, заинтересованные только в формулах расчета ЛП_τ-последовательностей, могут обратиться непосредственно к пункту Д.7.

Первые публикации об ЛП_τ-последовательностях [Д.19, Д.14] относятся к 1966 г. Более подробно теория ЛП_τ-последовательностей изложена в статье [Д.18] и в монографии [Д.11]. Ниже все результаты, содержащиеся в этой монографии, приводятся без ссылок, а все более поздние результаты — со ссылками. В связи с этим можно также указать на обзорную статью [Д.34].

Д.1. Геометрическое определение

Дадим вполне строгое геометрическое определение ЛП_τ-последовательностей.

Двоичные параллелепипеды. Назовем *двоичными отрезками* все отрезки, которые могут быть получены при делении отрезка $0 \leq x \leq 1$ на 2^m равных частей; $m = 0, 1, 2, \dots$. Для определенности все двоичные отрезки считаем замкнутыми слева и открытыми справа, если только правый конец отрезка отличен от единицы; если правый конец равен единице, то отрезок замкнут также и справа. При таком определении сумма всех двоичных отрезков длины 2^{-m} составляет отрезок $[0, 1]$.

Например, двоичными являются отрезки $[0, 1]$, $[0, 1/2)$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, Отрезки $[1/4, 3/4)$ или $[5/8, 7/8)$ двоичными не считаются.

Перенумеруем все двоичные отрезки и обозначим их через l_s ; $s = 1, 2, \dots$. Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$, где некоторые (или даже все) k_j могут совпадать. Назовем *двоичным параллелепипедом* Π_k множество точек с координатами (x_1, \dots, x_n) такими, что $x_j \in l_{k_j}$ при $j = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, любой такой двоичный параллелепипед принадлежит единичному n -мерному кубу K^n .

Π_0 -сетки. Сетку, состоящую из $N = 2^n$ точек куба K^n , назовем Π_0 -сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду Π_k с объемом $V_{\Pi_k} = 1/N$ принадлежит одна точка сетки.

Например, сетка, изображенная на рис. 1.1, не является Π_0 -сеткой, а сетка, изображенная на рис. 1.3, — Π_0 -сетка. (Поясним, что в число двоичных прямоугольников с площадью $1/16$ входят прямоугольники с размерами $1 \times 1/16, 1/2 \times 1/8, 1/4 \times 1/4, 1/8 \times 1/2, 1/16 \times 1$.)

Нетрудно доказать, что точки Π_0 -сетки расположены в каком-то смысле равномерно в K^n . К сожалению, такие сетки существуют только при $n = 1, 2, 3$; в четырехмерном кубе невозможно построить Π_0 -сетку с числом точек $N \geq 4$. Поэтому требование к распределению точек сетки приходится ослабить и ввести более общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сетка, состоящая из $N = 2^v$ точек куба K^n , называется Π_τ -сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду Π_k с объемом $V_{\Pi_k} = 2^\tau/N$ принадлежат 2^τ точек сетки. При этом всегда предполагается, что $v > \tau$.

Например, сетка, изображенная на рис. 1.1, представляет собой Π_2 -сетку.

Π_τ -сетки существуют в K^n при любых n , однако значения τ с ростом n приходится увеличивать. Проекция точек, образующих Π_τ -сетку в K^n , на любую m -мерную грань куба K^n образуют m -мерную Π_τ -сетку. Более того, эта m -мерная сетка может оказаться $\Pi_{\tau'}$ -сеткой с $\tau' < \tau$.

ЛП $_\tau$ -последовательности. Рассмотрим произвольную последовательность точек $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$, принадлежащих K^n . Назовем двоичным участком этой последовательности множество членов P_i с номерами i , удовлетворяющими неравенству вида

$$k2^s \leq i < (k+1)2^s, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad s = 1, 2, \dots$$

Например, участки $0 \leq i < 8, 8 \leq i < 16, 16 \leq i < 24, \dots$ двоичные, а участок $4 \leq i < 16$ двоичным не является.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность точек $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ куба K^n называется ЛП $_\tau$ -последовательностью, если любой ее двоичный участок, содержащий не менее чем $2^{\tau+1}$ точек, представляет собой Π_τ -сетку.

Название ЛП_τ-последовательность появилось как сокращение фразы «последовательность, любой двоичный участок которой представляет собой П_τ-сетку».

Д.2. Количественные оценки равномерности распределения

В этом разделе определены две количественные характеристики равномерности распределения, перечислены некоторые их свойства и оценки этих характеристик для ЛП_τ-последовательностей.

Отклонение. Рассмотрим в K^n произвольную сетку, состоящую из N точек P_1, \dots, P_N . Как и в разделе 1, обозначим через $S_N(G)$ количество точек P_i (с номерами $1 \leq i \leq N$), принадлежащих G . Произвольной точке P из K^n поставим в соответствие параллелепипед Π_P со сторонами, параллельными координатным плоскостям, и с диагональю OP (рис. Д.1). Объем Π_P обозначим через V_{Π_P} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отклонением¹⁾ точек P_1, \dots, P_N называется верхняя грань

$$D(P_1, \dots, P_N) = \sup_{P \in K^n} |S_N(\Pi_P) - NV_{\Pi_P}|.$$

Чем меньше D , тем более равномерным следует считать расположение точек P_1, \dots, P_N в K^n . Легко видеть, что всегда $D(P_1, \dots, P_N) \leq N$, но точная нижняя граница неизвестна (при $n = 1$ она равна $1/2$).

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы последовательность P_1, \dots, P_i, \dots была равномерно распределенной в K^n , необходимо и достаточно, чтобы при $N \rightarrow \infty$

$$D(P_1, \dots, P_N) = o(N).$$

Специалисты полагают [Д.33, Д.34], что наилучший возможный порядок отклонения при $N \rightarrow \infty$ равен $O(\ln^n N)$.

Неравномерность. Выберем в K^n произвольный двоичный параллелепипед Π_k и перенесем начало координат в центр Π_k . Координатные плоскости разобьют Π_k на

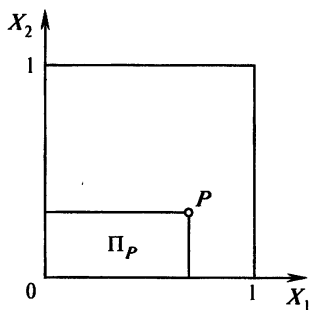


Рис. Д.1. К определению отклонения

¹⁾ В литературе часто отклонением называют отношение D/N , которое для случайных точек P_1, \dots, P_N превращается в отклонение выборочной функции распределения этих точек $S_N(\Pi_P)/N$ от теоретической функции распределения V_{Π_P} .

2^n равновеликих октантов, точнее, гипероктантов (рис. Д.2). Обозначим через V_k^+ совокупность всех «положительных», а через V_k^- — совокупность всех «отрицательных» октантов.

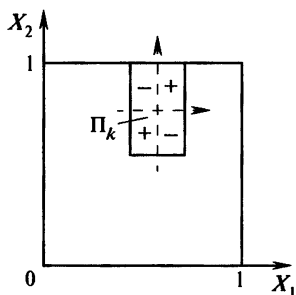


Рис. Д.2. К определению неравномерности

Если в K^n заданы N точек P_1, \dots, P_N , то равномерность их расположения в Π_k можно характеризовать величиной

$$|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|.$$

Верхняя грань этой величины по всем двучным параллелепипедам

$$\sup_{\Pi_k} |S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|$$

есть целое число, как-то характеризующее расположение точек P_1, \dots, P_N в K^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Неравномерностью* точек P_1, \dots, P_N называется максимальная верхняя грань

$$\varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) = \max \sup_{\Pi_k} |S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|,$$

где максимум берется по всем сеткам, которые состоят из проекций точек P_1, \dots, P_N на какую-нибудь m -мерную грань куба K^n (рассматриваются всевозможные грани при всех возможных $1 \leq m \leq n$).

Нетрудно доказать, что $1 \leq \varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) \leq N$, хотя значение $\varphi_\infty = 1$ реализуемо только в одномерном случае. В двухмерном случае ($n = 2$) точная нижняя граница $\varphi_\infty = 2$, а при $n > 2$ точная нижняя граница неизвестна.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы последовательность P_1, \dots, P_p, \dots была равномерно распределенной в K^n , необходимо и достаточно, чтобы при $N \rightarrow \infty$

$$\varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) = o(N).$$

Наилучший возможный порядок неравномерностей при $N \rightarrow \infty$ равен $O(1)$.

Оценки отклонений и неравномерностей. Обозначим, как обычно, через $\binom{m}{k}$ биномиальный коэффициент, так что

$$\binom{m}{k} = m(m-1)\dots(m-k+1)/k!.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любой Π_τ -сетки в K^n , состоящей из $N \geq 2^{n-1+\tau}$ точек, справедлива оценка

$$D(P_1, \dots, P_N) \leq 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} (v_j^{-\tau}),$$

где $v = \log_2 N$.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольного начального участка любой ЛП $_\tau$ -последовательности в K^n , содержащего не менее, чем $2^{n-1+\tau}$ точек, справедлива оценка

$$D(P_0, \dots, P_{N-1}) \leq 2^\tau [1 + \sum_{j=0}^{n-1} (v_{j+1}^{-\tau+1})] - 1,$$

где $v_1 = E(\log_2 N)$ — целая часть логарифма N .

ТЕОРЕМА 5. Для произвольного начального участка любой ЛП $_\tau$ -последовательности в K^n справедлива оценка

$$\varphi_\infty(P_0, \dots, P_{N-1}) \leq 2^{n-1+\tau}.$$

Пусть теперь $Q_0, Q_1, \dots, Q_j, \dots$ — какая-нибудь ЛП $_\tau$ -последовательность в K^n . Так как оценка неравномерностей в теореме 5 не зависит от N , то, очевидно, при $N \rightarrow \infty$

$$\varphi_\infty(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(1);$$

это наилучший возможный порядок.

Из теоремы 4 вытекает, что при $N \rightarrow \infty$

$$D(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(\ln^n N).$$

Как упоминалось ранее, это, по-видимому, наилучший возможный порядок для всех N . Однако, если ограничиться только значениями N вида $N = 2^v$, то эту оценку можно усилить. Дело в том, что любой начальный участок Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1} при $N = 2^v$ представляет собой Π_τ -сетку (если только $v > \tau$), и для оценки отклонения можно воспользоваться теоремой 3, из которой следует, что при $N = 2^v$

$$D(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(\ln^{n-1} N).$$

Последняя оценка показывает, что при практическом использовании ЛП $_\tau$ -последовательностей, вообще говоря, целесообразно выбирать количество точек вида $N = 2^v$. Тогда можно удваивать N , сохраняя эту оценку и не пересчитывая уже имеющиеся точки.

Из теорем 1 и 2 и оценок D и φ_∞ для ЛП $_\tau$ -последовательностей следует, что все ЛП $_\tau$ -последовательности равномерно распределены в K^n .

Случай кубических решеток. Для кубических решеток (см. пункт 1.1 и рис. 1.1), которые состоят из $N = M^n$ точек с координатами

$$\left(\frac{i_1 + 1/2}{M}, \dots, \frac{i_n + 1/2}{M} \right),$$

где i_1, \dots, i_n независимо принимают все значения $0, 1, \dots, M - 1$, величины D и φ_∞ можно вычислить точно:

$$D = \frac{1}{2} N^{1-1/n}, \quad \varphi_\infty = N^{1-1/n}.$$

Из этих формул видно, что при $n = 1$ отклонение и неравномерность таких решеток минимальны: $D = 1/2$, $\varphi_\infty = 1$. Однако с увеличением n порядки формул быстро ухудшаются и приближаются к наихудшему порядку $O(N)$.

Для случайных сеток, состоящих из N независимых случайных точек, равномерно распределенных в K^n , с большой вероятностью $D = O(\sqrt{N})$. Поэтому асимптотика отклонений для таких сеток лучше, чем асимптотика отклонений для кубических решеток, при $n \geq 3$, когда $\frac{1}{2} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Д.3. Алгебраическая теория

Этот раздел Дополнения — самый сложный. Здесь очень коротко описан эффективный способ построения ЛП $_{\tau}$ -последовательностей, у которых все координаты всех точек двоично рациональны.

ДР-последовательности. Выберем бесконечную треугольную матрицу с единицами на главной диагонали вида

$$\|v_{sj}\| = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ v_{sj} & & & & \ddots \end{vmatrix},$$

которую назовем *направляющей матрицей*. Элементы v_{sj} , расположенные ниже главной диагонали, могут быть нулями и единицами.

Задание матрицы (v_{sj}) равносильно заданию последовательности двоично рациональных дробей (в двоичной системе)

$$V_s = 0, v_{s1}, v_{s2} \dots v_{ss},$$

которые называются *направляющими числами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательностью двоично рационального типа или *ДР-последовательностью* называется последовательность чисел $r(0), r(1), \dots, r(i), \dots$, вычисляемых по следующим правилам:

$$(1) r(0) = 0, r(2^s) = V_{s+1},$$

(2) если $2^s < i < 2^{s+1}$, то $r(i) = r(2^s) * r(i - 2^s)$, где $*$ означает поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе. Эта логическая операция, называемая также «исключающее ИЛИ», осуществляется во всех современных ЭВМ одной командой и часто используется для сравнения кодов (вычислители называют ее обычно командой СРАВНЕНИЕ). Например, $7/16 * 5/32 = 11/32$, ибо $7/16 = 0,0111$, $5/32 = 0,00101$, а «сумма» $0,0111 * 0,00101 = 0,01011$.

Нетрудно доказать, что правила (1) и (2) равносильны следующему определению: если в двоичной системе $i = e_m \dots e_2 e_1$, то

$$r(i) = e_1 V_1 * e_2 V_2 * \dots * e_m V_m.$$

ЛЕММА. ДР-последовательность $r(0), r(1), \dots, r(i), \dots$, соответствующая направляющей матрице (v_{sj}) , есть одномерная ЛП₀-последовательность, составленная из всевозможных двоично рациональных дробей.

Пример Д.1. Пусть $v_{sj} = \delta_{sj}$, т. е. все $v_{ss} = 1$, а при $s \neq j$ все $v_{sj} = 0$. Тогда соответствующая ДР-последовательность представляет собой последовательность Ван дер Корпута: если $i = e_m \dots e_2 e_1$, то

$$p(i) = 0, e_1 e_2 \dots e_m.$$

Ниже строятся многомерные ЛП _{τ} -последовательности, каждая координата которых представляет собой ДР-последовательность. Основная трудность такого построения — обеспечить в каком-то смысле независимость этих координат.

Моноциклические операторы в поле GF(2). Поле GF(2) состоит из двух элементов: 0 и 1. Правила умножения — обычные; правила сложения таковы: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка m с постоянными коэффициентами $Lu_i = 0$, где разностный оператор L определен выражением

$$Lu_i \equiv u_{i+m} + a_{m-1}u_{i+m-1} + \dots + a_1u_{i+1} + u_i.$$

Здесь все u_i и a_i принадлежат $GF(2)$.

Решением уравнения $Lu_i = 0$ назовем бесконечную последовательность

$$\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots,$$

определенную при всех i , $-\infty < i < \infty$, и удовлетворяющую уравнению при каждом i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор L называется *моноциклическим*, если уравнение $Lu_i = 0$ имеет решение с наименьшим периодом $2^m - 1$.

Так как существует всего $2^m - 1$ различных нетривиальных групп (u_1, \dots, u_m) , состоящих из нулей и единиц, нетрудно доказать, что все нетривиальные решения моноциклического уравнения различаются между собой лишь сдвигом нумерации. В литературе иногда такие решения называют M -последовательностями (последовательностями максимального периода).

Таблица всех моноциклических операторов до порядка 9 включительно приведена в работе [Д.11], где, однако, имеется опечатка: вместо кода оператора 207 должен стоять код 203.

Пример Д.2. Оператор $u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i$ не моноциклический, так как уравнение

$$u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i = 0$$

имеет решение $u_i \equiv 1$ с периодом 1.

Оператор $u_{i+4} + u_{i+1} + u_i$ моноциклический, так как любое нетривиальное решение уравнения

$$u_{i+4} + u_{i+1} + u_i = 0$$

имеет период 15, например решение вида $\dots, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots$.

Построение ЛП₂-последовательностей. Условимся говорить, что направляющая матрица (v_{sj}) принадлежит оператору L порядка m , если выполнены два условия:

- каждый из первых m столбцов матрицы является решением уравнения $Lu_i = 0$:

$$Lv_{ij} = 0$$

при каждом фиксированном j ; $1 \leq j \leq m$;

- каждый из последующих столбцов матрицы является решением неоднородного уравнения:

$$Lv_{ij} = v_{i,j-m}$$

при каждом фиксированном j ; $m < j < \infty$.

О ДР-последовательности, соответствующей такой направляющей матрице (v_{sj}) , будем также говорить, что она принадлежит оператору L . Так как элементы v_{sj} , стоящие ниже диагонали в первых m столбцах, могут выбираться произвольно, одному оператору могут принадлежать разные ДР-последовательности.

ТЕОРЕМА 6. Пусть L_2, \dots, L_n — различные моноциклические операторы, порядки которых равны m_2, \dots, m_n . Пусть $p_j(0), p_j(1), \dots, p_j(i), \dots$ — какая-нибудь ДР-последовательность, принадлежащая оператору L_j . Тогда последовательность точек $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$ с координатами

$$Q_i = (p(i), p_2(i), \dots, p_n(i))$$

есть ЛП $_{\tau}$ -последовательность в K^n со значением

$$\tau = \sum_{j=2}^n (m_j - 1).$$

Здесь в качестве первой координаты использована определенная выше последовательность Ван дер Корпута, о которой формально можно сказать, что она принадлежит оператору $Lu_i \equiv u_{i+1}$ и единичной матрице (v_{sj}) .

О значениях τ . Из последней формулы видно, что для того, чтобы уменьшить τ , следует выбирать моноциклические операторы L_j возможно низких порядков m_j . С помощью теоремы 6 построены ЛП $_{\tau}$ -последовательности, для которых $\tau = 0$ при $n = 1, 2$ и $\tau = 1$ при $n = 3$; доказано, что эти значения τ — минимальные. При $n = 4$ получается значение $\tau = 3$, однако минимальность этого значения не доказана. Вообще, при $n \rightarrow \infty$

$$\tau = O(n \log n).$$

Д.4. О дополнительных свойствах равномерности

Оценки, полученные в пункте Д.2, показывают, что по своей асимптотике все ЛП $_{\tau}$ -последовательности относятся к числу наилучших. Однако для практики важно, чтобы равномерность расположения устанавливалась быстро, а не только при $N \rightarrow \infty$. С этой целью

в статье [Д.21] были сформулированы некоторые дополнительные требования, которые можно удовлетворить путем выбора неопределенных пока элементов v_{sj} в направляющих матрицах.

Свойство А. Разобьем куб K^n плоскостями $x_j = 1/2$ при $j = 1, 2, \dots, n$ на $t = 2^n$ октантов, которые будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность точек $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ на двоичные участки, длина которых равна t :

$$P_0, \dots, P_{t-1}; P_t, \dots, P_{2t-1}; P_{2t}, \dots, P_{3t-1}; \dots$$

Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным октантам, то мы говорим, что последовательность обладает *свойством А*.

ТЕОРЕМА 7. Последовательность $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$, построенная в теореме 6, обладает свойством А тогда и только тогда, когда определитель размером $n \times n$, составленный из первых столбцов всех направляющих матриц, равен $1 \pmod{2}$.

Существование ЛП $_{\tau}$ -последовательностей, обладающих свойством А, в любом K^n доказано в [Д.21]. Недавно И. Б. Матусов доказал, что ЛП $_{\tau}$ -последовательность, обладающую свойством А, можно построить, используя все моноциклические операторы низших порядков подряд.

В табл. Д.1, помещенной на втором форзаце, использованы все моноциклические операторы подряд, а направляющие числа выбраны так, что свойство А выполняется при любом $n \leq 16$.

Свойство А'. В кубе K^n проведем $3n$ плоскостей $x_j = 1/4, x_j = 1/2, x_j = 3/4$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Они разобьют K^n на $t' = 4^n$ кубиков, которые мы также будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ на двоичные участки, длина которых равна t' :

$$P_0, \dots, P_{t'-1}; P_{t'}, \dots, P_{2t'-1}; P_{2t'}, \dots, P_{3t'-1}; \dots$$

Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным кубикам, то мы говорим, что последовательность обладает *свойством А'*.

Свойство А' также исследовано в статье [Д.21]. Мы отметим только, что направляющие числа, приведенные в табл. Д.1, выбраны так, что свойство А' выполняется при каждом $n \leq 6$.

Можно ли, используя все моноциклические операторы низших порядков подряд, выбрать направляющие матрицы так, чтобы при каждом n были выполнены и свойство А, и свойство А', — неизвестно.

Свойство A в какой-то мере гарантирует разумное расположение точек Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1} при $N < 2^n$, так как каждая следующая точка попадает в один из свободных октантов. Более того, при $N = 2^{n-1}$ можно доказать, что половина точек расположена в области $x_j < 1/2$, а другая половина — в области $x_j \geq 1/2$, каково бы ни было $j = 1, 2, \dots, n$.

Д.5. Вычисление интегралов

Точки ЛП $_{\tau}$ -последовательностей используются в качестве узлов кубатурных формул для вычисления интегралов по K^n . В некоторых случаях такой способ вычисления интегралов обеспечивает наилучший порядок сходимости. Мы ограничимся минимальными сведениями из этой области. При этом используем обозначения $(x_1, \dots, x_n) \equiv P$ и $dx_1 \dots dx_n \equiv dP$.

Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{K^n} f(P) dP$$

ТЕОРЕМА 8. Если последовательность P_1, \dots, P_i, \dots равномерно распределена в K^n , то для любой ограниченной интегрируемой по Риману функции $f(P)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(P_i) = I.$$

Рассмотрим теперь класс функций $W_1(C)$, непрерывных в K^n и имеющих кусочно-непрерывные частные производные, содержащие не более одного дифференцирования по каждой переменной, которые по абсолютной величине не превосходят C .

Более подробно: в определение класса функций $W_1(C)$ входят все производные вида df/dx_j , все производные вида $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_k$ при $j \neq k$ и т. д. до самой старшей среди них $\partial^n f / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n$ включительно. И все эти частные производные по абсолютной величине не превосходят C .

ТЕОРЕМА 9. Если $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$ — ЛП $_{\tau}$ -последовательность в K^n , то при $N = 2^v$ и $v \rightarrow \infty$

$$\sup_{f \in W_1(C)} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(Q_i) - I \right| = O(N^{-1} \ln^{n-1} N).$$

В статье [Д.3] доказано, что этот порядок сходимости оптимальный для класса $W_1(C)$.

Примеры вычисления интегралов высокой кратности при помощи ЛП $_{\tau}$ -последовательностей имеются в работах [Д.8, Д.25, Д.28].

Вычисление несобственных интегралов [Д.9, Д.10]. Предположим, что

- (1) функция $f(P)$ и все ее частные производные, входящие в определение класса $W_1(C)$, непрерывны при $0 < x_j \leq 1; j = 1, 2, \dots, n$;
- (2) тогда, когда произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \rightarrow 0$, функция имеет интегрируемую особенность вида

$$f(P) \sim x_1^{-\beta_1} \cdot x_2^{-\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{-\beta_n}.$$

ТЕОРЕМА 10. Если $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$ — ЛП $_{\tau}$ -последовательность, построенная согласно теореме 6, то для любой функции $f(P)$, удовлетворяющей требованиям (1) и (2),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Q_i) = I.$$

Из теоремы 10 следует, что несобственные интегралы с помощью ЛП $_{\tau}$ -последовательностей можно вычислять тогда, когда подынтегральная функция имеет степенную особенность в начале координат.

Д.6. Некоторые другие свойства

Отлично распределенные последовательности. Наряду с равномерно распределенными последовательностями рассматривают также гораздо более узкий класс последовательностей, который называют *отлично распределенными* (*well-distributed* [Д.33]). Чтобы определить такие последовательности, необходимо наряду с исходной последовательностью P_1, \dots, P_i, \dots рассмотреть всевозможные «остаточные» последовательности вида $P_{k+1}, \dots, P_{k+i}, \dots$. Пусть $S_{N,k}(\Pi)$ — количество точек с номерами $k+1 \leq i \leq k+N$, принадлежащих Π (определение Π — см. пункт 1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность P_1, \dots, P_i, \dots называется *отлично распределенной*, если для любого Π

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_{N,k}(\Pi)}{N} = V_{\Pi}$$

равномерно относительно $k = 0, 1, 2, \dots$

Если в качестве P_i выбирать независимые случайные точки, равномерно распределенные в K^n , то с вероятностью 1 последовательность P_1, \dots, P_i, \dots будет равномерно распределенной. Но вероятность того, что последовательность эта окажется отлично распределенной, равна 0.

ТЕОРЕМА 11 [Д.15]. Все ЛП $_{\tau}$ -последовательности отлично распределены.

Корреляционные свойства ЛП_τ-последовательности. В алгоритмах Монте-Карло с конструктивной размерностью n можно использовать точки ЛП_τ-последовательности $Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ вместо случайных точек $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где γ_j — независимые случайные числа [90, Д.22].

При этом вместо сходимости по вероятности со скоростью $1/\sqrt{N}$ гарантируется сходимость в классическом смысле, иногда со скоростью $1/N^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ как угодно мало.

В таких расчетах роль независимых случайных чисел γ_j и γ_l играют последовательности координат $q_{1,j}, \dots, q_{i,j}, \dots$ и $q_{1,l}, \dots, q_{i,l}, \dots$. Вместо соотношения

$$r(\gamma_j, \gamma_l) = 0$$

(определение коэффициента корреляции приведено в пункте 4.2) имеем соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(q_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left(q_{i,l} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Скорость сходимости в последней формуле исследовалась эмпирически Б. Г. Ситниковым и А. П. Шагун. На основании этих экспериментов в работе [Д.25] была высказана гипотеза, что при $N = 2^v$

$$N \sum_{i=0}^{N-1} \left(q_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left(q_{i,l} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \Theta_{j,l}(v),$$

где все $\Theta_{j,l}(v)$ — целые неотрицательные числа.

Несмотря на то что многочисленные расчеты подтверждают эту гипотезу, а для $\Theta_{1,2}(v)$ даже подобрана аналитическая формула, строгого доказательства или опровержения этой гипотезы нет.

Бесконечномерные ЛП_τ-последовательности. Так как количество моноциклических операторов бесконечно, теорема 6 позволяет рассматривать бесконечномерные точки

$$X_i = (p(i), p_2(i), \dots, p_n(i), \dots),$$

проекции которых на K^n при каждом n представляют собой ЛП_τ-последовательности в K^n . Изучению последовательностей точек $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ посвящена работа [Д.8]. С помощью таких точек можно вычислять бесконечномерные интегралы, решать интегральные уравнения, моделировать цепи Маркова [Д.17, Д.20, Д.7]. Исследованию бесконечномерных равномерно распределенных последовательностей посвящена также статья [Д.4].

Д.7. Формулы расчета

Таблица числителей. В табл. Д.1 (напомним, что она размещена на втором форзаце) приведены числители $r_j^{(l)}$ направляющих чисел при $1 \leq j \leq 51$, $1 \leq l \leq 20$. Хотя в расчетах точек Q_i удобнее использовать сами направляющие числа

$$V_j^{(l)} = r_j^{(l)} 2^{-l},$$

мы табулировали числители, чтобы уменьшить объем таблицы. По табл. Д.1 можно вычислять точки Q_i с номерами $0 \leq i < 2^{20}$ в кубе K^n размерности $n \leq 51$.

Если требуются точки размерности $n \ll 51$, то следует использовать лишь первые n строк таблицы; если количество используемых точек заранее ограничено условием $i < 2^{l_M}$, где $l_M < 20$, то можно ограничиться первыми l_M столбцами этой таблицы.

Исходный алгоритм. Перед началом расчета надо заменить таблицу $r_j^{(l)}$ таблицей $V_j^{(l)}$.

Далее, если в двоичной системе номер точки i записывается в форме $i = e_m \dots e_2 e_1$, то все декартовы координаты точки $Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ вычисляются по единой формуле

$$q_{i,j} = e_1 V_j^{(1)} * e_2 V_j^{(2)} * \dots * e_m V_j^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Д.1})$$

где знак * означает поразрядное сложение по модулю два в двоичной системе (операция «исключающее ИЛИ»). Подробнее о ней сказано в разделе Д.3.

В формуле (Д.1) умножать e_s на $V_j^{(s)}$ не надо: если $e_s = 1$, то соответствующее значение $V_j^{(s)}$ войдет в (Д.1), а если $e_s = 0$, то соответствующее $V_j^{(s)}$ надо пропустить. Таким образом, для расчета по формуле (Д.1) нужны только логические операции.

Блок-схема программы для такого расчета имеется в работах [Д.11] и [91].

Арифметический алгоритм. Для реализации формулы (Д.1) можно прибегнуть к расчету непосредственно по таблице $r_j^{(l)}$. Для этого по заданному номеру i вычисляем

$$m = 1 + [\ln i / \ln 2],$$

а затем для $j = 1, 2, \dots, n$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m [2\{i2^{-l}\}] [2\{r_j^{(l)} 2^{k-1-l}\}] \right\}.$$

В последних двух формулах квадратные [] и фигурные { } скобки означают соответственно целую и дробную части содержимого этих скобок.

Расчет по арифметическому алгоритму гораздо медленнее, чем расчет по формуле (Д.1), но если количество используемых в расчете точек Q_i не превосходит 10^4 , то он вполне приемлем. Составленная по этому алгоритму подпрограмма на языке ФОРТРАН, опубликованная в работах [Д.24, Д.42], использовалась во многих расчетах. Приводим ее текст.

Подпрограмма на языке ФОРТРАН

Целые числа NR(J, L) берутся из табл. Д.1; I — номер точки, N — ее размерность. Используются две встроенные функции, имеющиеся во всех версиях ФОРТРАНА: ALOG (X) — натуральный логарифм X и INT (X) — целая часть X, а также функция, описанная в программе, $D(X) = X - \text{INT}(X)$. Значение $\ln 2$ принято равным 0,693147. Выходные данные — массив Q.

```

SUBROUTINE LPTAU (NR, I, N, Q)
  DIMENSION Q(N), NR (N, 20)
  D (X) = X - INT (X)
  A = I
  M = 1 + INT (ALOG (A)/0.693147)
  DO 1 J = 1, N
    S = 0
    DO 2 K = 1, M
      NS = 0
      DO 3 L = K, M
        B = NR (J, L)
3      NS = NS + INT (2*D(A/2**L))*INT (2*D(B/2**(L + 1 - K)))
2      S = S + D(0.5*NS)/2**(K - 1)
1      Q(J) = S
      RETURN
    END
  
```

Сверхбыстрый алгоритм. В статье [Д.1] предложен способ сверхбыстрого расчета ЛП_τ-последовательностей. Для этого порядок следования точек Q_i меняется так, чтобы каждая следующая точка Q'_i легко вычислялась по предыдущей точке Q'_{i-1} и чтобы при этом двоичные участки новой последовательности $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_i, \dots$ совпадали с двоичными участками последовательности $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$. Последнее

условие гарантирует сохранение всех основных и дополнительных свойств равномерности.

Пусть $\Gamma(i)$ — так называемый код Грея, соответствующий номеру i . По определению,

$$\Gamma(i) = i * [i/2],$$

здесь, как и ранее, квадратные скобки $[]$ означают целую часть числа, заключенного в них.

Например, $\Gamma(3) = 2$, так как в двоичной системе $i = 11$, $[i/2] = 1$, $i * [i/2] = 10$, а $\Gamma(10) = 15$, так как $i = 1010$, $[i/2] = 101$, $i * [i/2] = 1111$.

Два соседних кода $\Gamma(i)$ и $\Gamma(i - 1)$ всегда различаются в одном и только в одном разряде $l = l(i)$, номер которого можно вычислить по формуле

$$l = 1 + \log_2 [\Gamma(i) * \Gamma(i - 1)]. \quad (Д.2)$$

Поэтому, полагая $Q'_i = Q_{\Gamma(i)}$, получаем для расчета Q'_i следующий простой алгоритм:

$$(1) \quad q'_{0,1} = \dots = q'_{0,n} = 0;$$

$$(2) \quad q'_{i,j} = q'_{i-1,j} * V_j^{(i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Так как вычисление по последней формуле и по (Д.2) может быть осуществлено при помощи одних логических операций, то при больших n этот алгоритм оказывается быстрее, чем стандартные алгоритмы получения псевдослучайных чисел, в которых для получения n чисел надо выполнить n умножений.

Д.8. Обобщение: r -ичные ЛП $_{\tau}$ -последовательности

В 1982 г. появилась статья [Д.31], которая вызвала всплеск интереса к ЛП $_{\tau}$ -последовательностям. В этой статье двоичная конструкция обобщается на r -ичную, где целое число $r \geq 2$. Кроме того, построена оригинальная последовательность Фора, которая представляет собой r -ичную ЛП $_0$ -последовательность в K^n при $r \geq n$, r — простое число. Тем самым было доказано, что минимальное значение $\tau = 0$ можно реализовать в K^n , если $r \geq n$.

Особый интерес вызвала оценка отклонений для последовательности Фора. Дело в том, что для всех ЛП $_{\tau}$ -последовательностей справедлива оценка

$$D(P_1, \dots, P_N) \leq C(n) (\ln N)^n.$$

Для последовательности Фора удалось доказать, что $C(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а для двоичных ЛП $_{\tau}$ -последовательностей была известна лишь

грубая оценка, допускающая неограниченное увеличение $C(n)$. Поэтому ожидали, что эффективность последовательностей Фора превзойдет эффективность двоичных ЛП_τ-последовательностей (при $n = 2$ эти последовательности совпадают).

Первые же численные эксперименты опровергли эти ожидания [Д.29, Д.5], а в работе [Д.30] был сформулирован основной вывод: среди всех таких последовательностей «мы рекомендуем базис $r = 2$ ». Впрочем, в обзоре [Д.48] приведен пример задачи, для решения которой последовательность Фора оптимальна.

Неудачи r -ичных ЛП_τ-последовательностей обусловлены двумя причинами. Во-первых, расчет r -ичных точек на порядок сложнее, чем сверхбыстрый расчет двоичных точек. Во-вторых, и, пожалуй, это главное, равномерность r -ичных П_τ-сеток ухудшается с увеличением r .

Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим подробнее определение r -ичной П₀-сетки. Сперва вводятся r -ичные отрезки, получающиеся при делении отрезка $[0, 1]$ на r^m равных частей при $m = 0, 1, 2, \dots$. Затем вводятся r -ичные параллелепипеды Π , которые суть произведения r -ичных отрезков. Далее, множество, состоящее из $N = r^v$ точек, называется r -ичной П₀-сеткой, если каждому Π с объемом $1/N$ принадлежит одна точка множества.

Можно сосчитать, что количество r -ичных Π с объемом $1/N$ уменьшается при увеличении r . Поэтому количество условий, которым должны удовлетворять эти N точек, уменьшается; подробнее см. работы [Д.22, Д.49].

Численный пример Д.3. Пусть $N = 64$, $n = 2$. Если $r = 2$, то двоичные прямоугольники Π с площадью $1/N$ могут быть семи типов: $1 \times 1/64$, $1/2 \times 1/32$, $1/4 \times 1/16$, $1/8 \times 1/8$, $1/16 \times 1/4$, $1/32 \times 1/2$, $1/64 \times 1$, всего $7 \times 64 = 448$ прямоугольников. Каждому из этих прямоугольников должна принадлежать одна и только одна из этих 64 точек.

Пусть теперь $r = 8$. Восьмеричных прямоугольников Π с площадью $1/64$ гораздо меньше, всего три типа: $1 \times 1/64$, $1/8 \times 1/8$, $1/64 \times 1$, или $3 \times 64 = 192$ прямоугольника. Образующие восьмеричную П₀-сетку 64 точки должны распределяться по 192 прямоугольникам. Конечно, такое расположение реализовать легче.

Д.9. Другие обобщения

Второй сверхбыстрый алгоритм. Второй сверхбыстрый алгоритм опубликован в брошюре [Д.49]. Он не использует код Грея и сохраняет исходную нумерацию точек последовательности Q_0, Q_1, Q_2, \dots . Программы на языках FORTRAN-77 и СИ организованы так, что если предыдущая точка Q_{i-1} отсутствует, то Q_i вычисляется по номеру i ;

если точка Q_{i-1} имеется, то расчет осуществляется по сверхбыстрой рекуррентной формуле

$$q_{i,j} = q_{i-1,j} * W_j^{(k_i+1)},$$

где k_i — количество нулей в «хвосте» двоичного представления номера

$$i := e_m e_{m-1} \dots e_2 e_1,$$

а $W_j^{(s)}$ — модифицированные направляющие числа, которые были вычислены заранее. Их определение:

$$W_j^{(1)} = V_j^{(1)},$$

а при $s \geq 2$

$$W_j^{(s)} = V_j^{(1)} * V_j^{(2)} * \dots * V_j^{(s)},$$

$$V_j^{(s)} = W_j^{(s)} * W_j^{(s-1)}.$$

Такая организация программ удобна в многопроцессорных расчетах: начальные точки для каждого процессора определяются по заданным номерам, а все дальнейшие точки каждым процессором будут считаться по сверхбыстрой формуле.

Количество направляющих векторов в таблице, приведенной в [Д.49], равно 30, размерности $n \leq 51$. Впрочем, в Институте математического моделирования РАН имеется продолжение этой таблицы до размерности $n = 370$. Этот сверхбыстрый алгоритм реализован на сайте, указанном в Приложении на с. 159.

Пример Д.4. Приведем формулы для расчета точки Q_{30} . Так как в двоичной системе $30 = 11110$, то по исходному быстрому алгоритму $q_{30,j} = V_j^{(2)} * V_j^{(3)} * V_j^{(4)} * V_j^{(5)}$. По второму сверхбыстрому алгоритму $q_{30,j} = q_{29,j} * W_j^{(2)}$, ибо количество нулей в «хвосте» двоичного представления номера 30 равно $k_{30} = 1$.

Новая терминология. Известный теоретик Г. Нидеррейтер приступил в 1988 г. к изучению r -ичных Π_τ -сеток и ЛП $_\tau$ -последовательностей при любых $r \geq 2$ и $\tau \geq 0$. Он начал с изменения терминологии: r -ичные Π_τ -сетки превратились в r -ичные (t, m, s) -сетки¹⁾, а r -ичные ЛП $_\tau$ -последовательности стали называться r -ичными (t, s) -последовательностями²⁾; здесь $s \equiv n$ — размерность, $t \equiv \tau$ — параметр, а $m = \log_r N$ — целое число, определяющее количество точек сетки. Эта терминология получила весьма широкое распространение, хотя двоичные ЛП $_\tau$ -последовательности, используемые в нашей книге, чаще называют последовательностями Соболя³⁾.

1) Соответствующий английский термин: (t, m, s) -nets in base r .

2) Соответствующий английский термин (t, s) -sequences in base r .

3) В англоязычной литературе — Sobol sequences.

Книга [Д.35] содержит многочисленные результаты по теории (t, s) -последовательностей. Пока попытки превзойти известные последовательности успеха не имели. Например, постоянная $C(n)$ в оценке отклонения в общем случае зависит от r и от τ , так что C является функцией n, r, τ : $C(n, r, \tau)$. В [Д.30] были сосчитаны «оптимальные» r и τ , минимизирующие последнее выражение. Однако построенная «оптимальная» последовательность оказалась не лучше n -мерной последовательности Фора.

Другой пример: попытка уменьшить τ для двоичных ЛП $_{\tau}$ -последовательностей (путем использования неприводимых многочленов вместо примитивных) привела к ухудшению одно- и двумерных проекций этих последовательностей при незначительном уменьшении τ [Д.30].

Разные замечания. В 90-х гг. XX в. в теории кодирования появился новый объект изучения: дискретное множество точек, именуемое *t-design*. Оказалось, что *t-design* — это Π_{τ} -сетка, $t \equiv \tau$.

Наиболее известные реализации последовательностей Соболя — статьи [Д.29, Д.36]. Там реализован первый сверхбыстрый алгоритм, а во второй из этих работ впервые таблица направляющих чисел продлена до $n = 370$.

В разных работах имеются попытки улучшить последовательности Соболя путем отсечения начальных участков (*skipping*), исключения части точек (*leaping*), перемешивания точек (*scrambling, randomizing*) и т. п. Все такие эксперименты имеют весьма частный характер.

Действительным улучшением можно считать таблицу направляющих чисел, приведенную в книге [Д.32], которая реализует дополнительное свойство равномерности (свойство A) при $n \leq 32$. Там же указано, что попытка полагать все числители произвольно выбираемых направляющих чисел равными единице оказалась неудачной.

Д.10. О реализации исследования пространства параметров

Вообще говоря, в методе ИПП можно использовать пробные точки, отличные от точек ЛП $_{\tau}$ -последовательностей, например точки, принадлежащие другим квазислучайным последовательностям, случайные точки, точки, образующие кубические сетки. Отметим некоторые особенности таких подходов.

О квазислучайных последовательностях. Квазислучайной называют последовательность n -мерных точек P_1, P_2, \dots в единичном кубе, отклонения которых

$$D(P_1, \dots, P_N) \leq C(n) (\ln N)^n.$$

Это условие гарантирует хорошее распределение точек при $N \rightarrow \infty$, но о расположении точек P_1, P_2, \dots, P_N при сравнительно небольших N не содержит никакой информации. В обзоре [Д.48], где сравниваются несколько «хороших» квазислучайных последовательностей, сделан следующий вывод: нельзя утверждать, что одна последовательность всегда лучше, чем другая, — это зависит от конкретной задачи. В то же время, во всех численных экспериментах, в которых наряду с другими использовались ЛП_τ-последовательности, они оказывались в числе наилучших.

О датчиках псевдослучайных чисел. То, что равномерность расположения точек ЛП_τ-последовательностей при небольших n превосходит равномерность расположения случайных точек, видно невооруженным глазом. Отдельные примеры, в которых случайные точки дают лучшие результаты, — исключения, а не правило. Они связаны с использованием слишком малых N (малых по сравнению с вариацией исследуемой функции $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$): отдельная пробная точка может оказаться очень близко к пику функции.

С другой стороны, использование датчиков псевдослучайных чисел порождает проблемы, связанные с их тестированием. Например, известный датчик RANDU, в свое время рекомендованный корпорацией IBM и включенный в математическое обеспечение машин серии ЕС, оказался практически плохим.

В чем здесь трудность? Во-первых, период последовательности (а точнее, отрезок аперiodичности) должен превосходить количество псевдослучайных чисел, необходимых для расчета задачи. Это требование обычно легко проверяется, ибо длина периода указывается в описании датчика. Главная проблема в другом. Допустим, что период равен 10^{12} и конструкция датчика гарантирует «идеальное» распределение чисел на всем периоде. Допустим, что для расчета нашей задачи требуется всего 10^6 псевдослучайных чисел. *A priori* нет никакой гарантии, что первые 10^6 чисел периода хорошо распределены. Более того, весь период можно разделить на миллион участков, содержащих по 10^6 чисел. Из идеальности расположения всех 10^{12} чисел следует, что этот миллион участков должен содержать всевозможные участки, содержащие по 10^6 чисел, от самых хороших до самых плохих! Такой

плохой участок необходим в составе периода, но неприемлем в качестве самостоятельного массива, состоящего из 10^6 чисел.

В систему тестов, использованных в работе [Д.44], входит проверка серии начальных участков, длины которых удваиваются. Но проверялся ли так конкретный датчик?

О кубических сетках. Известны примеры успешного применения кубических сеток при решении задач, симметричных относительно всех переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Однако в разделе 1 указано, что кубические сетки заметно уступают случайным и квазислучайным тогда, когда $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ зависит сильно лишь от небольшого количества t переменных, $t \ll n$.

Такая же ситуация имеет место для функций, зависящих от всех переменных, если в разложении на разноразмерные слагаемые доминируют слагаемые низких размерностей.

О разложении функции на разноразмерные слагаемые. Согласно работам [Д.41, Д.12] интегрируемая в единичном кубе функция $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ единственным образом представима в виде

$$\Phi = C_0 + \sum_i \Phi_i(\alpha_i) + \sum_{i < j} \Phi_{ij}(\alpha_i, \alpha_j) + \dots + \Phi_{12\dots n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

где интеграл каждого слагаемого по любому из «своих» переменных равен нулю. В зарубежной литературе такое разложение называют ANOVA-разложением¹⁾.

В работе [Д.37] утверждается, что в различных областях приложений часто встречаются математические модели $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, в которых множественные взаимодействия переменных играют второстепенную роль. В ANOVA-разложении таких функций доминируют слагаемые низших размерностей, например,

$$\Phi \approx C_0 + \sum_i \Phi_i(\alpha_i) + \sum_{i < j} \Phi_{ij}(\alpha_i, \alpha_j).$$

Очевидно, кубические сетки плохо приспособлены для анализа таких функций. Более того, при исследовании таких функций ЛП $_{\tau}$ -последовательности окажутся заметно эффективнее случайных точек, ибо все одномерные проекции ЛП $_{\tau}$ -последовательностей представляют собой ЛП $_0$ -последовательности, а двумерные проекции при небольших N достаточно хорошо распределены [Д.26, Д.38].

¹⁾ ANOVA-*decomposition* — от слов ANalysis Of VARIances.

Д.11. Оценка скорости сходимости

Сходимость простейшего поиска. Рассмотрим функцию $f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, определенную в единичном кубе K^n . Пусть

$$f^* = \sup_{x \in K^n} f(x).$$

Для того чтобы оценить f^* , выберем в K^n пробные точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$, вычислим в этих точках значения $f(x^{(1)}), \dots, f(x^{(N)})$ и найдем наибольшее среди них:

$$f_N^* = \max_{1 \leq k \leq N} f(x^{(k)}).$$

Предполагается, что $f^* \approx f_N^*$.

Если $f(x)$ кусочно-непрерывна, а $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ — начальный участок последовательности $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}, \dots$, равномерно распределенной в K^n , то $f_N^* \rightarrow f^*$ при $N \rightarrow \infty$. Однако о скорости сходимости ничего сказать нельзя без дополнительных ограничений на $f(x)$.

Условимся писать $f(x) \in C_1$ или, более подробно,

$$f(x) \in C_1(L_1, \dots, L_n),$$

если существуют кусочно-непрерывные производные $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$ и

$$|\partial f/\partial x_i| \leq L_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Будем считать пробные точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ фиксированными. Тогда погрешностью приближения на классе функций C_1 называется верхняя грань

$$d_N = \sup_{f \in C_1} (f^* - f_N^*).$$

Величины d_N изучались в работах [Д.16, Д.13, Д.39]. Центральное место занимают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 12. Каковы бы ни были точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$,

$$d_N \geq c_N,$$

где

$$c_N = \frac{1}{2} \max \left(\frac{s!}{N} L_{i_1} \cdot L_{i_2} \cdot \dots \cdot L_{i_s} \right)^{1/s};$$

максимум берется по всевозможным группам $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ при $s = 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 13. Если точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ образуют Π_τ -сетку в K^n , то

$$d_N \leq Bc_N,$$

где $B = B(n, \tau)$ ни от N , ни от L_1, \dots, L_n не зависит.

Из этих теорем следуют два важных вывода.

Во-первых, наилучший порядок сходимости d_N при $N \rightarrow \infty$ определяется величинами c_N . Во-вторых, этот наилучший порядок сходимости можно реализовать, если в качестве $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ использовать начальные участки ЛП $_{\tau}$ -последовательности при $N = 2^m$, m — целые, которые представляют собой П $_{\tau}$ -сетки при всех достаточно больших m .

Изотропный класс функций $C_1(L)$. До появления статьи [Д.16] в вычислительной математике рассматривались всегда классы функций C_1 с одинаковыми определяющими постоянными, т. е. с $L_i = L$ при всех $1 \leq i \leq n$. В самом деле, очевидно, в качестве L можно выбрать наибольшую среди констант L_i , тогда

$$C_1(L_1, \dots, L_n) \subset C_1(L),$$

и все оценки, полученные для $C_1(L)$, справедливы для $C_1(L_1, \dots, L_n)$.

Однако ситуация в корне меняется, когда делаются попытки выбрать оптимальные пробные точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$. Об этом речь пойдет в следующем пункте.

Для класса $C_1(L)$ формула для c_N резко упрощается:

$$c_N = \frac{1}{2} (n!)^{1/n} L N^{-1/n}.$$

Такой порядок сходимости для $C_1(L)$ был давно известен. Известно было также, что его легко реализовать: достаточно выбрать $N = M^n$ и построить кубическую сетку, состоящую из точек с координатами

$$\left(\frac{i_1 - 1/2}{M}, \dots, \frac{i_n - 1/2}{M} \right),$$

где i_1, \dots, i_n принимают все значения $1, 2, \dots, M$ (рис. 1.1). Для такой сетки

$$d_N = \frac{1}{2} n L N^{-1/n}.$$

Последние две формулы (для c_N и d_N) совпадают по порядку $N^{-1/n}$. Более того, различие в константах не очень велико, ибо

$$n/(n!)^{1/n} \leq e.$$

Нужны ли оптимальные сетки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$. Оптимальная сетка для класса $C_1(L)$ определяется из условия $d_N = \min$. Однако в ряде статей, например в [Д.6], приводятся результаты расчетов, в которых оптимальные сетки явно уступают ЛП $_{\tau}$ -последовательностям, которые на оптимальность не претендуют. В чем причина этого «парадокса»?

Как уже отмечалось в разделе 1, функции от многих переменных на практике очень часто сильно зависят от небольшого количества t так называемых ведущих переменных, причем $t \ll n$. В этом случае среди L_1, \dots, L_n будут $(n - t)$ малых констант и значение c_N для класса $C_1(L_1, \dots, L_n)$ может оказаться гораздо меньше, чем c_N для $C_1(L)$.

Поясним это на примере функции $f(x)$, для которой $L_1 = \dots = L_t = L$, $L_{t+1} = \dots = L_n = 0$. Из общей формулы для c_N получим

$$c_N = \frac{1}{2} (t!)^{1/t} L N^{-1/t}.$$

Поэтому, используя ЛП_t-последовательности (по теореме 13), получим порядок сходимости $N^{-1/t}$, а по оптимальным сеткам $N^{-1/n}$. Если $t \ll n$, то разница очень велика! Иными словами, оптимальные сетки гарантируют наилучшую погрешность для «худших» функций класса $C_1(L)$, но для «нехудших» функций эти оценки далеко не оптимальны.

Возникает вопрос: может быть, надо строить оптимальные сетки не для $C_1(L)$, а для $C_1(L_1, \dots, L_n)$, минимизируя общее выражение для d_N ? К сожалению, ответ на этот вопрос отрицательный. Дело в том, что значения $L_i = \sup_x |\partial f / \partial x_i|$, как правило, неизвестны. А оценить их — задача более сложная, чем оценка f^* .

О поиске см. также работы [Д.46, Д.43, Д.40, Д.2].

Сходимость приближенного множества Парето. Предположим, что в K^n заданы k целевых функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$ и поставлена многокритериальная задача: при $x \in K^n$

$$f_1(x) \rightarrow \min, \dots, f_k(x) \rightarrow \min.$$

Согласно нашей методике, выбираем пробные точки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$, в каждой из них вычисляем все критерии, а затем путем попарных сравнений исключаем неэффективные точки. Получаем дискретное множество E_N , состоящее из приближенно паретовских пробных точек в количестве не более N . Как оценить близость E_N к множеству Парето E ?

Рассмотрим соответствующие множества \tilde{E}_N и \tilde{E} в пространстве критериев (рис. 3.3). Итак, \tilde{E}_N состоит из конечного множества точек, а \tilde{E} в простейших случаях — гиперповерхность. Выберем какую-нибудь точку $S \in \tilde{E}_N$. Проведем через точку S прямые, параллельные координатным осям Of_1, \dots, Of_k , до пересечения с \tilde{E} в точках A_1, \dots, A_k

(рис. Д.3). Близость точки S к \tilde{E} определим как минимальное расстояние

$$\Delta(S, \tilde{E}) = \min_{1 < p < k} |SA_p|,$$

а отклонение \tilde{E}_N от \tilde{E} естественно определить как максимум

$$\Delta(\tilde{E}_N, \tilde{E}) = \max_{S \in \tilde{E}_N} \Delta(S, \tilde{E}).$$

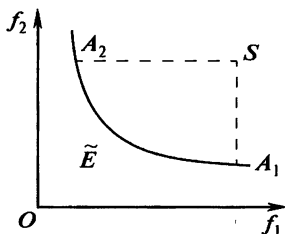


Рис. Д.3. Проекция точки S на \tilde{E} (случай $k = 2$)

Величины $\Delta(\tilde{E}_N, \tilde{E})$ изучались теоретически и численно в ряде статей [Д.23, Д.45, Д.47, Д.27].

ТЕОРЕМА 14. Предположим, что все $f_1(x), \dots, f_k(x)$ принадлежат одному и тому же классу $C_1(L_1, \dots, L_n)$. Выберем какую-нибудь точку S из \tilde{E}_N и предположим, что все точки A_1, \dots, A_k принадлежат выпуклой гиперповерхности, входящей в состав \tilde{E} , а «пирамида» $SA_1 \dots A_k$ принадлежит \tilde{G} . Тогда

$$\Delta(S, \tilde{E}) \leq 2d_N.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если для всех точек S из \tilde{E}_N выполнены условия теоремы 14, то

$$\Delta(\tilde{E}_N, \tilde{E}) \leq 2d_N.$$

Замечание 1. Как уже неоднократно отмечалось, критерии $f_p(x)$, встречающиеся на практике, часто не чувствительны по отношению ко многим из переменных x_p . Поэтому можно считать, что $f_p(x) \in C_1(L_1, \dots, L_n)$, где многие L_i близки к нулю. Вследствие этого порядок сходимости c_N при оптимизации $f_p(x)$ может оказаться заметно лучше, чем $N^{-1/n}$.

Однако ситуация эта меняется в задаче об аппроксимации \tilde{E} . Класс $C_1(L_1, \dots, L_n)$, фигурирующий в теореме 14, содержит все целевые функции $f_1(x), \dots, f_k(x)$, а ведущие переменные для разных функций, вообще говоря, разные. Поэтому постоянных L_i , близких к нулю, здесь, как правило, не будет, и скорость сходимости $N^{-1/n}$ оказывается вполне реалистической.

Замечание 2. В статье [Д.16] величина d_N вводится как геометрическая характеристика расположения точек $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ и называется ρ -разбросом точек¹⁾. Приведем

¹⁾ Соответствующий английский термин — ρ -dispersion of points.

это определение. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ — две произвольные точки из K^n . Обозначим

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n L_i |x_i - y_i|,$$

и пусть

$$R(x) = \min_{1 \leq p \leq N} \rho(x, x^{(p)}) -$$

« ρ -расстояние» от точки x до ближайшей пробной точки. Тогда, по определению,

$$d_N = \sup_x R(x).$$

Последняя формула позволяет явно (численно или аналитически) вычислить d_N для любой заданной сетки $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$.

Равенство $d_N = \sup_{f \in C_1} (f^* - f_N^*)$ доказывается с помощью последней формулы.

Краткое описание программного комплекса MOVI

Метод ИПП реализован в виде программного комплекса MOVI [134, 140]. Название MOVI означает «многокритериальная оптимизация и векторная идентификация» (Multicriteria Optimization and Vector Identification).

ПК MOVI предназначен для решения многокритериальных задач — проектирования, идентификации, управления, улучшения прототипа, доводки опытного образца и др.

Число варьируемых параметров зависит от используемого генератора. В случае применения ЛП_τ-последовательностей это число достигает 51. Предусмотрена возможность установки различных генераторов пробных точек. При использовании стандартного датчика случайных чисел число варьируемых параметров достигает многих тысяч. В так называемой «университетской» версии MOVI число варьируемых параметров ограничено до 8. Число оптимизируемых критериев качества ограничено возможностями компьютера.

Для хранения данных в пакете используется SQL-сервер Borland Interbase 6.0. Используемая в программе технология подключаемых модулей позволяет работать с задачами, разработанными в различных средах, в том числе и в среде Mathworks Matlab.

Неформальный анализ допустимого множества решений является важной составной частью метода ИПП. Наиболее предпочтительное решение специалист выбирает на основе анализа допустимого множества и множества Парето. Программный комплекс MOVI включает в себя следующие инструменты анализа:

- таблицы испытаний;
- таблицы допустимых и приближенных Парето-оптимальных решений;
- таблицы векторов, не удовлетворивших функциональным ограничениям;
- гистограммы распределения допустимых решений;
- графики зависимостей «критерии — параметры» и «критерии — критерии», отражающие чувствительность критериев к параметрам и зависимости критериев от критериев.

· Многокритериальный анализ показывает работу математической модели и всех ограничений, позволяет найти пути коррекции исходной постановки задачи.

Мы будем вам благодарны, если вы посетите наш вебсайт

<http://www.psi-movi.com>,

где возможно подробнее узнать об особенностях ПК MOVI и получить этот программный комплекс. На вебсайте находится дополнительная информация относительно возможных его изменений и совершенствований.

1. *Азбель А. Б.* Исследование движения на повороте многоосных седельных автопоездов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. автомоб. дорож. ин-т, 1979. — 18 с.
2. *Алябьев В. Ю.* Основы теории оптимизации параметров лесных погрузочно-разгрузочных машин: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. лесотехн. ин-т, 1973. — 43 с.
3. *Артоболевский И. И., Сергеев В. И., Соболев И. М. и др.* Об использовании ЭВМ для постановки задач оптимального проектирования // ДАН СССР. — 1977. — 233. — № 4. — С. 567–570.
4. *Аузрбах В. М., Маневич И. З., Воля М. О. и др.* Повышение эффективности механизации метростроения на основе модульного принципа // Транспортное строительство. — 1985. — № 10. — С. 24–28.
5. *Баранчик В. П.* Новые принципы и пути совершенствования мотоциклов на основе применения и развития оптимизационных методов исследования динамических процессов в их подсистемах: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. автомоб.-дорож. ин-т, 1993. — 47 с.
6. *Батуриади А. И., Булаков В. М., Осин М. Н. и др.* Применение ЭВМ при проектировании изделий машиностроения. — М.: Знание, 1991. — 45 с.
7. *Батурина Н. Ю.* Анализ и синтез эвольвентных червячных передач с улучшенными качественными показателями: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Новочеркасск: Новочеркасский политехн. ин-т, 1988. — 16 с.
8. *Бахмутов С. В.* Научные основы параметрической оптимизации автомобиля по критериям управляемости и устойчивости: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. гос. тех. унив. «МАМИ», 2001. — 25 с.
9. *Бахмутов С. В., Богомолов С. В., Висич Р. Б.* Проектная технология двухэтапной оптимизации эксплуатационных свойств автомобиля // Автомобильная промышленность. — 1998. — № 12. — С. 18–21.
10. *Бенайон Р., Ларичев О. И., Монгольфье Ж. и др.* Линейное программирование с многими критериями. Метод ограничений // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 8. — С. 108–115.
11. *Березанский О. М., Семенов Ю. Н.* Решение задач проектирования на основе методов многокритериальной оптимизации // Судостроительная промышленность. Сер. Системы автоматизации проектирования, производства и управления. — 1988. — Вып. 9. — С. 78–85.
12. *Бетин А. В.* Определение рациональных параметров несущих систем прецизионных токарных станков, обеспечивающих улучшение их динамического качества: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: ЭНИМС, 1992. — 16 с.
13. *Бетин А. В., Каминская В. В.* Оптимизация параметров несущих систем токарных станков с подвижной бабкой // Интегрированная АСУ автоматизированных производств: сб. науч. тр. / ЭНИМС. — М.: ЭНИМС, 1992. — С. 102–113.

14. *Бирбраер Р. А.* Разработка методов анализа и синтеза конструкции столов, многокривошипных листоштамповочных прессов: Автореферат дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. станкоинструм. ин-т, 1987. — 23 с.
15. *Богомолов С. В.* Методика совершенствования управляемости и устойчивости автомобиля на основе многокритериальной оптимизации его реакции на управляющие и возмущающие воздействия: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. гос. тех. унив. «МАМИ», 2000. — 25 с.
16. *Божевальная Е. А.* Метод расчета оптимальных параметров формирующих барабанов станков для сборки покрышек пневматических шин: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. ин-т хим. машиностр., 1986. — 16 с.
17. *Бондаренко М. И., Наземкин А. Ю., Пожалостин А. А. и др.* Построение согласованных решений в многокритериальных задачах оптимизации больших систем // ДАН. — 1994. — 335. — № 6. — С. 719—724.
18. *Боровин Г. К., Кузьмин И. А., Попов Д. Н. и др.* Оптимизация параметров электрогидравлического усилителя с жесткой неединичной обратной связью / Препринт ин-та прикл. мат. АН СССР. — Москва, 1985. — 24 с.
19. *Брухман В. Я., Овчинникова Н. Ф., Статников Р. Б.* Принятие решений и оптимальное проектирование в многокритериальных и многомерных задачах ЛП-поиском // Случайный поиск экстремума: Материалы IX Всесоюзного семинара. — Киев: Наукова думка, 1974. — С. 153—155.
20. *Бужинский И. М., Брухман В. Я.* Зависимость коэффициента светопропускания волоконно-оптических дисков от их расчетной апертуры // Оптико-механическая промышленность. — 1974. — № 6. — С. 3—5.
21. *Бузало Н. А.* Деформационный расчет и оптимизация висячих комбинированных систем повышенной жесткости: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Ростов н/Д.: Ростов. инженерно-строит. ин-т, 1989. — 19 с.
22. *Велихов Е. П., Бетелин В. Б., Ставицкий А. И.* Проблемы компьютеризации машиностроения // Машиноведение. — 1986. — № 5. — С. 3—11.
23. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972.
24. *Висич Р. Б.* Многокритериальная оптимизация конструкции подвески автомобиля по показателям управляемости и устойчивости: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. гос. тех. унив. «МАМИ», 2002. — 23 с.
25. *Геминтерн В. И., Штильман М. С.* Оптимизация в задачах проектирования. — М.: Знание, 1982. — 64 с.
26. *Генкин М. Д., Корчемный Л. В., Матусов И. Б. и др.* Многокритериальный выбор оптимальных параметров механизма газораспределения // Машиноведение. — 1983. — № 3. — С. 60—68.
27. *Герасимов Е. Н., Почтман Ю. М., Скалозуб В. В.* Многокритериальная оптимизация конструкций. — Киев; Донецк: Вища школа, 1985. — 134 с.
28. *Глазунов В. А.* Многокритериальный подход к проблемам виртуальности и выбора научной теории // Концепция виртуальных миров и научное познание / Ин-т философии РАН. — СПб.: Изд. Русского христианского гуманитарного ин-та, 2000. — С. 186—196.
29. *Годжаев В. А., Дмитриченко С. С., Губерниев А. Я.* Оптимальное проектирование валопроводов машин // Вестник машиностроения. — 1992. — № 1. — С. 3—5.
30. *Горбунов В. Г.* Оптимальный синтез параметрической системы универсальных кривошипных прессов при автоматизации конструкторского проектирования: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Воронеж: Воронежский политех. ин-т, 1984. — 16 с.

31. *Городецкий Ю. И.* Анализ и синтез динамического качества фрезерных станков: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. станкоинструм. ин-т, 1986. — 46 с.
32. *Городецкий Ю. И.* Создание объектной САПР для поиска оптимальных параметров вертикально-фрезерных станков по показателям их динамического качества // Математическое моделирование и программное обеспечение в САПР: Межвузовский сб. — Горький: Изд. Горьковского универ., 1984. — С. 48—66.
33. *Гринкевич В. К., Зинюков П. И., Статников Р. Б. и др.* Определение оптимальных параметров механизма по нескольким локальным критериям // Методы создания машин в малозумном исполнении. — М.: Наука, 1978. — С. 44—49.
34. *Гулак В. А.* Рациональные схемы и размеры рычажной передачи большегрузных вагонов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. ин-т инженеров ж.-д. транспорта, 1984. — 22 с.
35. *Гуляев В. Г., Горбатов П. А., Лысенко Н. М. и др.* Совершенствование динамических свойств корпусной группы шнековых очистных комбайнов // Разработка месторождений полезных ископаемых. — Киев: Техніка, 1987. — Вып. 78. — С. 78—86.
36. *Гуляев В. Г., Кондрахин В. П., Лысенко Н. М.* Оптимизация параметров демпфирующих устройств для системы подвески исполнительных органов очистного комбайна // Разработка месторождений полезных ископаемых. — Киев: Техніка, 1983. — Вып. 64. — С. 45—51.
37. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств. — М.: Сов. радио, 1975.
38. *Докукин А. В., Красников Ю. Д., Хургин З. Я.* Статистическая динамика горных машин. — М.: Машиностроение, 1978.
39. *Егоров И. Н., Кретицин Г. В., Матусов И. Б. и др.* Задачи проектирования и многокритериального управления регулируемых технических систем // ДАН. — 1998. — 359. — № 3. — С. 330—333.
40. *Егоров И. Н., Кретицин Г. В., Матусов И. Б. и др.* Многокритериальная оптимизация сложных технических систем от проектирования до управления // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1998. — № 2. — С. 16—29.
41. *Житомирский Б. Е., Рубанович Ю. А., Филатов А. А.* Использование метода многокритериальной оптимизации при проектировании трансмиссий главных приводов прокатных станков // Машиноведение. — 1984. — № 1. — С. 33—39.
42. *Зайкова И. Г., Яблонский В. В.* Оптимизация параметров активной виброзащитной системы с управляемым демпфированием для объектов с одной и шестью степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1991. — № 1. — С. 16—20.
43. *Зарифьян О. П.* Многокритериальный синтез цилиндрических зубчатых передач с оптимальными параметрами методом ЛП-поиска: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Новочеркасск: Новочеркасский политехн. ин-т, 1983. — 17 с.
44. *Зверев И. А.* Векторная идентификация параметров шпиндельных узлов металлорезающих станков // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1997. — № 6. — С. 68—75.
45. *Зверев И. А.* Многокритериальное проектирование шпиндельных узлов на опорах качения: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. гос. технолог. универ. «Станкин», 1997. — 45 с.
46. *Зейтман М. Ф., Статников Р. Б.* Поиск оптимальных параметров гибкого зонтичного ротора высокоскоростной ультрацентрифуги с двухступенчатой упругой подвеской // Колебания и уравнивание роторов. — М.: Наука, 1973. — С. 43—47.

47. *Зинюков П. И., Самидов Х. С., Фридман С. И.* Выбор оптимальных параметров машин по критериям виброактивности // *Механика машин.* — Тбилиси: Мецниереба, 1983. — С. 78—91.
48. *Иванов Г. М.* Синтез гидромеханических систем при проектировании динамически нагруженных станков: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Экспериментальный научно-исследовательский институт металлорежущих станков (ЭНИМС), 1988. — 34 с.
49. *Игнатъев В. А., Матусов И. Б., Статников Р. Б.* Многокритериальная оптимизация параметров робота // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* — 2000. — № 5. — С. 84—93.
50. *Ингерман В. Г.* Повышение эффективности математического моделирования в петрофизике // *Нефтяная промышленность.* — Нефтегазовая геология, геофизика и бурение. — 1985. — № 10. — С. 15—18.
51. *Казанов Ю. Т.* Разработка методов оптимизации динамических параметров вибрационных конвейеров с эксцентриковым вибратором: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. высш. техн. уч. им. Н. Э. Баумана, 1984. — 16 с.
52. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
53. *Каминская В. В., Глазозицкий Л. А., Судникович А. Ю.* Многокритериальная оптимизация компоновок металлорежущих станков // *Интегрированная АСУ автоматизированных производств: сб. науч. тр. / ЭНИМС.* — М.: ЭНИМС, 1992. — С. 93—102.
54. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А.* Оптимальное управление световыми пучками в нелинейных средах. — М.: Знание, 1986.
55. *Картышов С. В.* Многокритериальный анализ задач стратегического маркетинга в программе «Marketing Expert» // *Маркетинг и маркетинговые исследования в России.* — 1997. — № 5 (11). — С. 33—45.
56. *Картышов С. В., Смирнов Б. В.* Методика анализа риска и неопределенности, а также задач расчета вариантов цен группы товаров из заданной прибыли в программе «Marketing Expert» // *Маркетинг и маркетинговые исследования в России.* — 1998. — № 1 (13). — С. 44—51.
57. *Крюков В. И., Литвин Л. М.* Динамика резонансных вибромашин с нелинейными основными и приводными упругими связями // *Вибротехника.* — Каунас, 1973. — № 3 (20).
58. *Крюков В. И., Литвин Л. М., Соболев И. М. и др.* Оптимальное проектирование резонансных вибрационных машин // *Машиноведение.* — 1980. — № 3. — С. 31—39.
59. *Лурье З. Я., Жерняк А. И., Саенко В. П.* Многокритериальное проектирование шестеренных насосов с внутренним зацеплением // *Вестник машиностроения.* — 1996. — № 3. — С. 3—8.
60. *Лурье З. Я., Жерняк А. И., Саенко В. П.* Оптимизация качающих узлов шестеренных насосов внутреннего эвольвентного зацепления // *Проблемы машиноведения и надежности машин.* — 1996. — № 3. — С. 37—43.
61. *Матусов И. Б., Плетнев А. Е., Статников Р. Б. и др.* Многокритериальная идентификация и задачи доводки // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* — 1996. — № 6. — С. 107—117.
62. *Мафтер В. И.* Структурно-параметрический синтез и разработка исполнительных механизмов бортового оборудования летательных аппаратов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. высш. тех. уч. им. Н. Э. Баумана, 1984. — 16 с.
63. *Медник А. И.* Некоторые задачи идентификации и оптимизации сложных механических систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Ин-т машиноведения, 1974. — 24 с.

64. *Мишустин В. А.* Автоматизация проектирования машинных агрегатов автоматизированных транспортно-складских систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Минск: Ин-т тех. кибернетики Белорусской АН, 1989. — 24 с.
65. *Муницина Н. А.* Оптимизация параметров механизмов параллельной структуры с упругими элементами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Ин-т машиноведения РАН, 1996. — 19 с.
66. *Муравьев И. А., Бреднева Н. Д.* Оптимизация процесса экстракции свежесобранных плодов боярышника // Фармация. — 1987. — № 6. — С. 37—39.
67. *Одрин В. М.* Морфологический синтез систем: Постановка задачи, классификация методов, морфологические методы «конструирования» // Ин-т кибернетики АН УССР; Препринт 86-3. — Киев, 1986. — 37 с.
68. *Озерной В. М.* Принятие решений: Обзор // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 11. — С. 106—121.
69. *Осин М. И.* Методы автоматизированного проектирования летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1984. — 167 с.
70. *Остапшин Н. М.* Выбор структуры и параметров активных пневматических и гидropневматических виброизоляторов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Ин-т машиноведения РАН, 1985. — 20 с.
71. *Очиров В. Д.* Разработка унифицированного метода автоматизированного анализа и синтеза механизмов привода режущих аппаратов сельскохозяйственных машин: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Ин-т машиноведения АН СССР, 1991. — 25 с.
72. *Павлов Ю. С., Пожалостин А. А., Статников Р. Б. и др.* Многокритериальное моделирование и анализ // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1996. — № 1. — С. 105—113.
73. *Пельцвергер Б. В.* Применение декомпозиционного подхода для решения сложных задач комбинаторной оптимизации // Техническая кибернетика. — 1988. — № 3. — С. 72—78.
74. *Перминов М. Д.* Методология исследования колебаний и шума структурно-сложных систем «человек—машина—среда»: Науч. доклад на соискание уч. степени д-ра техн. наук / Ин-т машиноведения РАН. — Москва, 1996. — 73 с.
75. *Петренко А. И., Лабодубец В. В., Чкалов В. В.* Оптимальное схемотехническое проектирование в машиностроении / Уч.-метод. каб. по высш. образованию при Минвузе УССР. — Киев, 1989. — 63 с.
76. *Плужников А. И.* Точность и оптимизация кинематических цепей станков. — М.: Машиностроение, 1983. — 176 с.
77. *Подиновский В. В.* Методы многокритериальной оптимизации. — М.: Изд. ВИА им. Ф. Э. Дзержинского. — 1971. — Вып. 1.
78. *Подиновский В. В., Гаврилов В. М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Сов. радио, 1975.
79. *Попов Д. Н.* Оценка эффективности и оптимальное проектирование гидроприводов // Вестник машиностроения. — 1986. — № 9. — С. 20—23.
80. *Растригин Л. А.* Системы экстремального управления. — М.: Наука, 1974.
81. *Решетов Д. Н., Шувалов С. А., Дудко В. Д. и др.* Расчет деталей машин на ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1985.
82. *Ризкин И. Х.* Машинный анализ и проектирование технических систем. — М.: Наука, 1985.
83. *Самидов Х. С.* Разработка комплексных методов анализа и оптимизации колебательных процессов металлорежущих станков: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Тбилиси: Груз. политехн. ин-т, 1984. — 50 с.

84. *Севрикова С. Р.* Электрогидравлический привод испытательного стенда с обратной связью по усилию: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Моск. автомобильно-дорожный ин-т, 1986. — 19 с.
85. *Синельников Л. Н.* Критериальный подход в задаче формирования геометрии коленчатого вала автомобильного двигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1998. — № 4. — С. 69—79.
86. *Синельников Л. Н.* Оптимизация углового расположения противовесов коленчатого вала // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1994. — № 6. — С. 115—122.
87. *Синельников Л. Н.* Синтез клапанного механизма с критериальной оценкой качества конструкции // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1998. — № 1. — С. 19—27.
88. *Снастин А. А.* Разработка системы оптимального управления колонным аппаратом на основе математической модели процесса производства брома: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Калинин: Калининский политех. ин-т, 1988. — 18 с.
89. *Соболь И. М.* Многомерные интегралы и метод Монте-Карло // ДАН СССР. — 1957. — 114. — № 4. — С. 706—709.
90. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973. — 312 с.
91. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования // Проблемы случайного поиска. — Рига: Зинатне, 1972. — № 1. — С. 117—135.
92. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Постановка некоторых задач оптимального проектирования при помощи ЭВМ / Препринт № 24. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1977.
93. *Сиваковский А. О., Гончаревич И. Ф.* Вибрационные и волновые транспортирующие машины. — М.: Наука, 1983.
94. *Статников Р. Б., Матусов И. Б.* Декомпозиция и агрегирование больших систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2000. — № 6. — С. 15—23.
95. *Статников Р. Б., Матусов И. Б.* Многокритериальное проектирование машин. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
96. *Статников Р. Б., Матусов И. Б.* Поиск оптимальных решений с помощью конечно-элементных программ общего назначения // ДАН. — 1994. — 336. — № 4. — С. 481—484.
97. *Статников Р. Б., Матусов И. Б., Сахаров В. А. и др.* Многокритериальная идентификация и оптимизация в задачах проектирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1997. — № 5. — С. 34—41.
98. *Статников Р. Б., Матусов И. Б., Статников А. Р.* Некоторые основные оптимизационные задачи машиностроения. Постановка и решение // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2000. — № 2. — С. 3—12.
99. *Статников Р. Б., Матусов И. Б., Фролова О. А.* Поиск наилучших решений в задачах проектирования // Научно-техническая информация. — 1998. — Сер. 2: Информационные процессы и системы. — № 3. — С. 39—45.
100. *Судникович А. Ю.* Автоматизация методов расчета направляющих металлорежущих станков применительно к задачам оптимизации параметров несущих систем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: АО «Экспериментальный научно-исследовательский ин-т металлорежущих станков» (ЭНИМС), 1993. — 16 с.
101. *Сушкин В. А.* Многокритериальная оптимизация основных параметров при проектировании струговых установок для выемки угля: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Тула: Тульский политехн. ин-т, 1983. — 24 с.

102. Тимофеев Г. А. Разработка методов расчета и проектирования волновых зубчатых передач для приводов следящих систем: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Институт машиноведения РАН, 1997. — 32 с.
103. Трегубов В. А. Многокритериальный выбор параметров виброизоляции операторов // Машиноведение. — 1983. — № 2. — С. 30—35.
104. Федоренко Р. П. Приближенные решения задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
105. Хейси М. И. Выбор рабочих параметров динамических схем свobodнопоршневых машин расширительного типа с магнитной связью: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Ин-т машиноведения РАН, 1992. — 23 с.
106. Хомяков В. С., Старостин В. К., Кушнир М. А. Многокритериальная оптимизация внутришлифовальных головок на подшипниках качения // Станки и инструмент. — 1984. — № 2. — С. 17—19.
107. Хомяков В. С., Яцков А. И. Оптимизация несущей системы одностоечного токарно-русельного станка // Станки и инструмент. — 1984. — № 5. — С. 14—16.
108. Черников В. А. Многокритериальная оптимизация рабочих органов плодуборочных машин // Тракторы и сельхозмашины. — 1986. — № 6. — С. 37—39.
109. Черных В. В. Структурный анализ, расчет и многокритериальная оптимизация параметров и характеристик механизмов подвесок колес легковых автомобилей семейства «ВАЗ»: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: Институт машиноведения РАН, 2002. — 25 с.
110. Черных В. В., Макеев О. М. Оптимизация кинематических характеристик подвески колеса легкового автомобиля // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1999. — № 1. — С. 13—20.
111. Черных В. В., Макеев О. М. Оптимизация конструктивных параметров подвески управляемого колеса легкового автомобиля // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2000. — № 3. — С. 9—15.
112. Чешанков Б. И., Русчев Д. Т. Многокритериальная оптимизация нелинейной динамической виброзащитной системы с дополнительной связью по ускорению // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1998. — № 4. — С. 3—7.
113. Bakhmutov S. V., Bogomolov S. V. The Improvement of Vehicle Handling and Stability / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — Pp. 91—97.
114. Barmas V. Ya. Nuclear Reactor / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers. 1999. — Pp. 67—72.
115. Bartel D. L., Marks R. W. The Optimal Design of Mechanical Systems with Competing Design Objectives // Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME. — 1974. — № 2. — Pp 171—178.
116. Biryk V. I. Aircraft / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers., 1999. — Pp. 116—122.
117. Bordetsky A., Statnikov R. Multiple Criteria Fan-Out Mechanism for Peer-to-Peer Collaborative Networking / Eleventh International Conference on Telecommunication Systems. Modeling and Analysis. October 2—5, 2003, Monterey, CA, USA. — Pp. 391—403.
118. Dobrokhodov V., Statnikov R., Statnikov A. Modeling and Simulation Framework for Multiple Objective Identification of a Controllable Descending System / Proceedings of International Conference on Adaptive Modelling and Simulation (ADMOS-2003). Geteborg, Sweden. 29th of September-1 October 2003.

119. *Dobrokhodov V., Statnikov R.* Modeling and Simulation Framework for Multi-Objective Identification of a Guided Descending System / Proceedings of AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Austin, TX. August 11–14, 2003.
120. *Dyer P. C., Fishburn P. C., Steuer R. E.* Multiple-Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: the Next Ten Years // Management Science. — 1992. — Vol. 38. — № 5. — Pp. 645–654.
121. *Egorov I. N., Kretinin G. V.* Search for Compromise Solution of the Multistage Axial Flow Compressor's Stochastic Optimization Problem. Aerothermodynamics of Internal Flows III, Beijing, China. — 1996.
122. *Glazunov V. A., Kraynev A. F., Munitsyna N. V.* A Parallel Manipulator for Extremal Media / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Pp. 80–84. Dordrecht / Boston / London, Kluwer Academic Publishers., 1999.
123. *Gobbi M., Mastinu G., Catelani D, Guglielmetto, L., Bocchi M.* / Multi-Objective Optional Design of Road Vehicle Sub-Systems by Means of Global Approximation; 15th European ADAMS Users' Conference. — 2000.
124. *Grunondz V. T.* Unmanned Vehicle Configuration / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers., 1999. — Pp. 73–80.
125. *Gumpert W.* Self-excited Oscillations at Starting Trucks as an Example for Multicriterial Optimization with Use of Step-by-Step Integration / First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization; International Society for Structural and Multidisciplinary Optimization (ISSMO). May 28 — June 2, 1995. Goslar, Lower Saxony, Germany, 1995. — Pp. 16–18.
126. *Lieberman E. R.* Multi-Objective Programming in the USSR. — M.: Academic Press, 1991.
127. *Lozino-Lozinsky G. E., Ossin M. I.* Multipurpose Aerospace Systems / In Statnikov R. B. Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers., 1999. — Pp. 122–132.
128. *McNeill K., Statnikov R., Koharek E.* The Network Testbed Sizing Problem — A Proposed Research Framework / Twelfth International Conference on Telecommunication Systems, Modeling and Analysis. July 24–28, 2004, Monterey, CA, USA. — 2004. — Pp. 299–310.
129. *Nogovitsin B. F.* Optimization of the Die-Casting Machine Locking Mechanizm / In Statnikov R. B., Matusov J. B. Multicriteria Optimization and Engineering. — N. Y.: Chapman & Hall, 1995. — Pp. 186–187.
130. *Parsons M. G., Scott R. L.* Formulation of Multicriterion Design Optimization Problems for Solution with Scalar Numerical Optimization Methods // Journal of Ship Research. — Vol. 48. — No. 1. — March, 2004. — Pp. 61–76.
131. *Portman V. T., Sklyarevskaya Y. I., Yakovlev A. Y.* Flexible Manufacturing Systems Design / In Statnikov R. B., Matusov J. B. Multicriteria Optimization and Engineering. — N. Y.: Chapman & Hall, 1995. — Pp. 183–187.
132. *Stadler W., Dauer J. P.* Multicriteria Optimization in Engineering: a Tutorial and Survey. «Structural Optimization: Status and Promise» / Ed. by M. P. Kamat // Progress in Aeronautics and Astronautics; American Institute of Aeronautics and Astronautics. — Washington: DC, 1992. — Vol. 150. — Pp. 209–249.
133. *Statnikov R. B.* Multicriteria Design. Optimization and Identification. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

134. *Statnikov R., Bordetsky A., Statnikov A.* Multicriteria Analysis of Real-Life Engineering Optimization Problems: Statement and Solution // *Nonlinear Analysis*. — 2005. — № 63. — Pp.e 685—e 696.
135. *Statnikov R. B., Matusov J. B.* Multicriteria Analysis in Engineering. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
136. *Statnikov R. B., Matusov J. B.* Multicriteria Optimization and Engineering. — N. Y.: Chapman and Hall, 1995.
137. *Statnikov R. B., Matusov J. B.* Use of P-nets for the Approximation of the Edgeworth — Pareto Set in Multicriteria Optimization // *Journal of Optimization Theory and Application*. — 1996. — Vol. 91. — № 3. — Pp. 543—560.
138. *Steuer R. E., Sun M.* The Parameter Space Investigation Method of Multiple Objective Nonlinear Programming: a Computational Investigation // *Operations Research*. — 1995. — Vol. 43. — № 4. — Pp. 641—648.
139. *Yakimenko O. A., Statnikov R. B.* Multicriteria Parametrical Identification of the Parafoil-Load Delivery System // *Proc. of 18th AIAA Aerodynamic Decelerator Systems Technology Conference and Seminary (AIAA 2005-1664)*, Germany, May, 2005.
140. *Yanushkevich I., Statnikov A., Statnikov R.* MOVI 1.3 Software Package. Certificate of Registration, United States Copyright Office, The Library of Congress. March 9, 2004.

- Д.1. Антонов И. А., Салеев В. М. Экономичный способ вычисления ЛП_τ-последовательностей // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1979. — 19. — № 1. — С. 243—245.
- Д.2. Антонова Г. М. Методика ЛП_τ-поиска с усреднением для исследования динамических стохастических систем, представленных имитационными моделями / Ин-т проблем управления РАН. — М., 2000.
- Д.3. Бахвалов Н. С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. — 1972. — 12. — № 6. — С. 655—664.
- Д.4. Каневский В. А., Лев Г. Ш. Последовательности точек, распределенные в бесконечномерном пространстве // ДАН СССР. — 1979. — 248. — № 1. — С. 31—33.
- Д.5. Левитан Ю. Л., Маркович Н. И., Розин С. Г. и др. О квазислучайных последовательностях для численных расчетов // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1988. — Т. 28. — № 5. — С. 86—92.
- Д.6. Пилявский В., Вольфович И., Юшкев Э. Сравнение эффективности методов глобальной оптимизации при решении обратной задачи лакокрасочной оптики // Теория оптимальных решений. — Вильнюс, 1985. — № 11. — С. 29—39.
- Д.7. Соболев И. М. Бесконечномерные равномерно распределенные последовательности в алгоритмах Монте-Карло // Методы Монте-Карло в вычисл. мат. и мат. физ. — Новосибирск: Наука, 1974. — С. 24—31.
- Д.8. Соболев И. М. Бесконечномерные равномерно распределенные последовательности в вычислительной математике / Препринт № 22. — Ин-т прикладной математики АН СССР, 1974.
- Д.9. Соболев И. М. Вычисление несобственных интегралов при помощи равномерно распределенных последовательностей // ДАН СССР. — 1973. — 210. — № 20. — С. 278—281.
- Д.10. Соболев И. М. Использование равномерно распределенных последовательностей для приближенного вычисления несобственных интегралов // Теория кубатурных формул и приложение функционального анализа. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 62—66.
- Д.11. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
- Д.12. Соболев И. М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2. — № 1. — С. 112—118.
- Д.13. Соболев И. М. О квадратурных формулах для функций от нескольких переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1989. — Т. 29. — № 6. — С. 935—941.
- Д.14. Соболев И. М. О методе рядов Хаара в теории многомерных квадратур // Междунар. конгр. математиков: Тез. научн. сообщ. — М., 1966. — Вып. 14. — С. 48.
- Д.15. Соболев И. М. О наилучших равномерно распределенных последовательностях // Успехи мат. наук. — 1977. — 32. — № 2. — С. 231—232.

- Д.16. *Соболь И. М.* О поиске экстремальных значений функции от нескольких переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1988. — Т. 28. — № 4. — С. 483—491.
- Д.17. *Соболь И. М.* О псевдослучайных числах для построения дискретных цепей Маркова методом Монте-Карло // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1974. — 14. — № 1. — С. 36—44.
- Д.18. *Соболь И. М.* О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1967. — 7. — № 4. — С. 784—802.
- Д.19. *Соболь И. М.* О распределении точек в кубе и сетках интегрирования // Успехи мат. наук. — 1966. — 21. — № 5. — С. 271—272.
- Д.20. *Соболь И. М.* О сходимости бесконечномерных кубатур и моделировании цепей Маркова // Вопр. вычисл. и приклад. мат. — Ташкент, 1975. — Вып. 32. — С. 162—167.
- Д.21. *Соболь И. М.* Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1976. — 16. — № 5. — С. 1332—1337.
- Д.22. *Соболь И. М.* Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
- Д.23. *Соболь И. М., Картышев С. В., Кульчицкая И. А. и др.* О многокритериальной оптимизации математических моделей // Математическое моделирование. — 1994. — Т. 6. — № 6. — 85—93.
- Д.24. *Соболь И. М., Левитан Ю. Л.* Получение точек, равномерно расположенных в многомерном кубе / Препринт № 40. — М.: Ин-т прикладной математики, 1976.
- Д.25. *Соболь И. М., Левитан Ю. Л.* Эксперименты по вычислению интегралов высокой кратности // Вопр. вычисл. и приклад. мат. — Ташкент, 1978. — Вып. 51. — С. 138—145.
- Д.26. *Соболь И. М., Мышецкая Е. Е.* О двумерных проекциях ЛП_r-последовательностей // Кубатурные формулы и их приложение: сб. — Красноярск, 2000. — С. 188—200.
- Д.27. *Соболь И. М., Мышецкая Е. Е.* Примеры сходимости дискретных приближений к многомерному множеству Парето // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14. — № 12. — С. 48—54.
- Д.28. *Соболь И. М., Розин С. Г., Хомский Л. Х.* О конструктивной размерности алгоритмов Монте-Карло // Методы Монте-Карло и вычислит. мат. и мат. физ. — Новосибирск, 1976. — С. 16—23.
- Д.29. *Bratley P., Fox B. L.* Implementing Sobol's quasirandom sequence generator. ACM Trans. Math. Software, 1988. — Vol. 14. — N. 1. — Pp. 88—100.
- Д.30. *Bratley P., Fox B. L., Niederreiter H.* Implementation and Tests of Low Discrepancy Sequences. ACM Trans. Model. Comput. Simulation, 1993. — Vol. 2. — Pp. 195—213.
- Д.31. *Faure H.* Discrépance de suites associées à une système de numération (en dimension s). Acta Arithmetica, 1982. — Vol. 4. — Pp. 337—351.
- Д.32. *Jaeckel P.* Monte Carlo Methods in Finance. — London: J. Wiley, 2002.
- Д.33. *Kuipers L., Niederreiter H.* Uniform Distribution of Sequences. N. Y.: J. Wiley, 1974.
- Д.34. *Niederreiter H.* Quasi-Monte Carlo Methods and Pseudo-random Numbers. Bulletin Amer. math. soc., 1978. — N. 6. — Pp. 957—1041.
- Д.35. *Niederreiter H.* Random Number Generators and Quasi-Monte Carlo Methods. SIAM, Philadelphia, 1992.
- Д.36. *Paskov S. H., Traub J. F.* Faster Valuation of Financial Derivatives. J. Portfolio Manag., 1995. — Pp. 113—120.

- Д.37. *Rabitz H., Alis O. E., Shorter J., Shim K.* Efficient Input-output Model Representation. *Comput. Phys. Commun.*, 1999. — Vol. 117. — N. 1–2. — Pp. 11–20.
- Д.38. *Schmid W. Ch.* Projections of Digital Nets and Sequences. *Math. Comput. Simulation*, 2001. — Vol. 55. — N. 1–3. — Pp. 239–247.
- Д.39. *Sobol' I. M.* A Global Search for Multicriterial Problems / *Proc. 9th Internat. Conf. MCDM*, Washington, 1990. — Pp. 401–412.
- Д.40. *Sobol' I. M.* An Efficient Approach to Multicriteria Optimum Design Problems. *Surv. Math. Industry*, 1992. — Vol. 1. — N. 4. — Pp. 259–281.
- Д.41. *Sobol' I. M.* Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates. *Math. Comput. Simulation*, 2001. — Vol. 55. — N. 1–3. — Pp. 271–280.
- Д.42. *Sobol' I. M.* On the Systematic Search in a Hypercube. *SIAM J. Numer. Analysis*, 1979. — 16. — N. 5. — Pp. 790–793.
- Д.43. *Sobol' I. M., Bakin S. G.* On the Crude Global Search. *J. Comput. Appl. Maths*, 1994. — Vol. 56. — Pp. 283–293.
- Д.44. *Sobol' I. M., Levitan Yu. L.* A Pseudo-random Number Generator for Personal Computers. *Computers & Maths with Applies*, 1999. — Vol. 37. — Pp. 33–40.
- Д.45. *Sobol' I. M., Levitan Yu. L.* Error Estimates for the Crude Approximation of the Trade-off Curve. *MCDM / Proc. 12th Internat. Conf.*, Hagen. Springer, 1997. — Pp. 83–92.
- Д.46. *Sobol' I. M., Levitan Yu. L.* On Stochastic Modelling of Error Distribution in a Crude Global Search. *Stochastic Optimization and Design*, 1992. — Vol. 1. — N. 1. — Pp. 73–84.
- Д.47. *Sobol' I. M., Mysheyskaya E. E.* Convergence Estimates for Crude Approximations of a Pareto Set. *Computers & Maths with Applies*, 2002. — Vol. 44. — Pp. 877–886.
- Д.48. *Sobol' I. M., Shukhman B. V.* Integration with Quasirandom Sequences: Numerical Experience. *Internat. J. Modern Phys., C*, 1995. — Vol. 6. — N. 2. — Pp. 263–275.
- Д.49. *Sobol' I. M., Turchaninov V. I., Levitan Yu. L., Shukhman B. V.* Quasirandom Sequence Generators. *Keldysh Inst. Appl. Maths., Moscow*, 1992. — 22 p.

- Агрегирование подсистем 125, 131
Адекватные векторы 91
Анализ 4, 86, 102, 113, 123, 128
- Бампер 126, 128
Большие системы 116, 124
- Варьируемые параметры 84, 122
Векторная идентификация параметров
— — — долбежного станка 103
— — — шпиндельного узла 108
Выделение зависимых критериев 66
- Двоичный
— отрезок 133
— параллелепипед 133
— участок 134
Диалоговый алгоритм 30
— — автоматизированный 16
— —, схема 31
Допустимая точка 29
ДР-последовательность 138
- Задача
— доводки автомобиля 94
— оптимизации картера 84
Задняя панель 126, 129
Законы управления 117
- Идентифицированные векторы 92
Идентифицируемые параметры 96, 104, 111
Интеграл 143
— несобственный 144
- Класс функций $C_1(L)$ 155
— — $C_1(L_1, \dots, L_n)$ 154
— — $W_1(C)$ 143
Код Грея 148
Компромиссная кривая 52
— аналитическая 56
— приближенная 53
Корреляционные свойства ЛП_τ-последовательностей 145
Коэффициент корреляции 63
— — критериев 64
— — —, вычисление 65
- Критериальные ограничения 29
Критерии адекватности 91, 97, 105, 111
Критерии качества 84, 100, 114, 122, 128
Критерии линейно-зависимые 63
— нормированный 35
— решающий 43
Кубическая решетка 18, 155
- ЛП-поиск 22, 45
ЛП_τ-последовательность 134
— r -ичная 148
— бесконечномерная 145
—, неравномерность 136
—, отклонение 136
- Математическая модель 84, 94, 104, 109, 122, 126, 129, 130
Матрица критериев 32
Метод
— исследования пространства параметров (метод ИПП) 3, 6, 13, 14, 83, 90, 116, 159
— Монте-Карло 25, 145
— ограничений 62
— отбора 25
— последовательных уступок 62
Минимальное свойство эффективных точек 47
Многокритериальные задачи
— — доводки опытных образцов 93
— — идентификации 90
— — проектирования 83
— — — регулируемых систем 116
— — — улучшения прототипа 88, 99, 127
Многокритериальная оптимизация
— — больших систем 124
— — в параллельном режиме 5, 131
Многомерный куб K^n 18
Множество
— возможных точек \tilde{D} 47
— допустимых точек D 29
— паретовских точек \tilde{E} 47
— эффективных точек E 46
Модернизация исходной модели 75
Моноциклический оператор 139

- Монте-Карло алгоритм 145
M-последовательность 140
- Направляющая матрица 138
 Направляющие числа 139
 Неравномерность 135
 — кубической решетки 138
 — ЛП_τ-последовательности 137
- Операция * 139
 Оптимальное проектирование осевого компрессора 120
 Оптимальные параметры 43
 Отклонение 135
 — кубической решетки 138
 — ЛП_τ-последовательности 137
 — П_τ-сетки 137
 Отлично распределенная последовательность точек 144
- Параметрические ограничения 27
 Параметры
 — конструктивные 118
 — управления 118
 Паретовская точка 47
 Парето-оптимальные решения 86
 Подпрограмма 147
 Поиск
 — в многомерном кубе 18
 — в произвольной ограниченной области 23
 — случайный 21
 Поле $GF(2)$ 139
 Поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе 139
 Последовательность
 — Ван дер Корпуа 139
 — двоично-рационального типа 139
 — D_N 33
 — отлично распределенная 144
 — равномерно распределенная 20
 Построение согласованных решений 125
 Приближенная компромиссная кривая 53
 Приближенно паретовские точки 53
 — эффективные точки 48
 Пробные точки 32
- Программный комплекс MOVI 6, 159
 Простейший поиск 21, 154
 — критериев 47
 — параметров 26
 Псевдокритерии 34, 84
 П₀-сетка 134
- Равномерное распределение точек
 — — — в кубе 20
 — — — в произвольной ограниченной области 23
 Редуктор 36
 Резонансная виброплощадка 72
 Ресурс точки 68
 — — относительный 71
 Решающий критерий 43
- Свойство
 — A 142
 — A' 142
 Случайный поиск 21
 Случайные числа 144
 Специальная ε-окрестность 50
 Структурная идентификация 91
 Структурная оптимизация 128
 Сходимость 154
 — приближенного множества Парето 156
 — простейшего поиска 154
- Таблица испытаний 30, 35, 78
 — —, время расчета 33
 Таблица числителей направляющих чисел 142, 146
- Усеченная таблица испытаний 35
- ФОРТРАН** 147
 Функциональные зависимости 84, 106
 Функциональные ограничения 27, 106, 122
- Цепи Маркова 145
- Эксперименты 96, 103, 115
 Эффективная точка 45
 Эффективность отбора 25

Предисловие авторов ко второму изданию	3
Предисловие авторов к первому изданию	8
Введение	10
1 Систематический поиск в многомерных областях	18
1.1. Поиск в многомерном кубе	18
1.2. Поиск в произвольной ограниченной области	23
2 Выбор критериальных ограничений	26
2.1. Исходные данные	26
2.2. Диалоговый алгоритм	30
2.3. Некоторые особенности алгоритма	34
2.4. Пример. Оптимизация параметров редуктора	36
3 Выбор параметров	43
3.1. Один решающий критерий	43
3.2. Несколько решающих критериев	45
3.3. Компромиссная кривая	52
3.4. Примеры расчета приближенных компромиссных кривых	56
4 Другие возможности метода исследования пространства параметров	61
4.1. Автоматизированный вариант диалога	61
4.2. Исследование взаимозависимости критериев	63
4.3. О возможностях улучшения оптимального решения	68
5 Оптимальное проектирование резонансной виброплощадки.	72
5.1. Исходные данные	72
5.2. Первая задача: исследование возможностей модернизации исходной модели	75
5.3. Вторая задача: эскизное проектирование машины с минимальной массой	81

6	Многокритериальные задачи проектирования с использованием метода конечных элементов	83
6.1.	Задача оптимизации картера	84
6.2.	Решение задачи и анализ результатов	86
7	Многокритериальные задачи идентификации	90
7.1.	Метод исследования пространства параметров в задачах векторной идентификации	90
7.2.	Многокритериальные задачи доводки опытных образцов	93
7.3.	Задача доводки автомобиля	94
7.4.	Векторная идентификация параметров долбежного станка	103
7.5.	Векторная идентификация параметров шпиндельного узла и его доводка	108
8	Многокритериальное проектирование регулируемых систем. Большие системы	116
8.1.	Общая постановка задачи проектирования регулируемых систем . . .	116
8.2.	Оптимальное проектирование осевого компрессора	120
8.3.	Многокритериальная оптимизация больших систем	124
8.4.	Построение согласованных решений.	125
8.5.	Многопараметрическая и многокритериальная оптимизация в параллельном режиме	131
	Дополнение. Некоторые свойства ЛП_τ-последовательностей	123
д1.	Геометрическое определение	133
д2.	Количественные оценки равномерности распределения	134
д3.	Алгебраическая теория	138
д4.	О дополнительных свойствах равномерности	141
д5.	Вычисление интегралов	143
д6.	Некоторые другие свойства	144
д7.	Формулы расчета	146
д8.	Обобщение: r -ичные ЛП _τ -последовательности	148
д9.	Другие обобщения	149
д10.	О реализации исследования пространства параметров	151
д11.	Оценка скорости сходимости	154
	Приложение. Краткое описание программного комплекса MOVI . . .	159
	Литература к предисловию, введению и разделам 1—8	161
	Литература к Дополнению	170
	Предметный указатель	173

Таблица испытаний

Таблица 5.3 (к странице 78)

t	$\Phi_1(A_t)$	t	$\Phi_2(A_t)$	t	$\Phi_3(A_t)$	t	$\Phi_4(A_t)$	t	$\Phi_5(A_t)$	t	$\Phi_6(A_t)$
248	7,02	445	0,233	319	28,25	475	3,70	588	0,047	214	0,051
353	7,04	475	0,241	248	28,34	1022	3,74	418	0,106	295	0,120
132	7,17	141	0,241	794	28,46	957	4,10	910	0,133	853	0,120
673	7,30	40	0,241	47	28,94	593	4,15	863	0,144	910	0,122
47	7,31	78	0,242	935	29,38	253	4,37	214	0,155	231	0,130
528	7,32	831	0,242	176	29,52	768	4,52	134	0,170	807	0,163
905	7,37	183	0,243	498	29,59	143	4,55	853	0,176	819	0,177
733	7,39	667	0,243	13	30,15	643	4,62	295	0,180	445	0,183
379	7,41	925	0,243	40	30,34	116	4,66	637	0,197	40	0,186
836	7,42	433	0,243	528	30,62	204	4,77	947	0,214	116	0,188
141	7,42	655	0,244	922	30,82	588	4,91	347	0,233	637	0,214
690	7,43	396	0,245	475	30,94	552	4,93	396	0,236	588	0,217
620	7,47	319	0,246	905	31,62	176	5,16	203	0,243	406	0,221
421	7,49	913	0,246	682	31,68	733	5,20	231	0,256	475	0,227
922	7,50	819	0,248	141	31,69	667	5,27	925	0,256	790	0,243
498	7,52	682	0,248	819	31,70	661	5,42	406	0,256	655	0,245
787	7,57	794	0,248	1	31,72	379	5,43	116	0,271	362	0,260
218	7,58	498	0,249	1022	31,83	224	5,54	819	0,281	203	0,266
78	7,59	176	0,250	831	32,00	368	5,63	619	0,283	36	0,266
181	7,61	935	0,250	433	32,41	619	5,68	153	0,294	619	0,274
552	7,63	619	0,250	421	32,54	406	5,69	913	0,298	78	0,279
990	7,65	134	0,252	379	32,80	433	5,70	648	0,298	224	0,281
319	7,70	922	0,252	445	33,62	794	5,77	807	0,303	149	0,282
768	7,70	615	0,252	181	33,95	682	5,78	224	0,303	667	0,285
336	7,73	879	0,252	368	34,77	533	5,81	40	0,305	48	0,286
879	7,73	115	0,255	353	34,79	13	5,81	445	0,305	628	0,286
13	7,75	1	0,256	218	35,01	408	5,87	628	0,310	925	0,287
831	7,76	243	0,256	787	35,06	874	5,89	183	0,316	418	0,294
605	7,79	600	0,258	874	35,18	498	5,92	520	0,322	706	0,304
153	7,80	996	0,260	643	35,34	859	5,96	996	0,335	615	0,306
40	7,81	143	0,261	768	35,64	637	5,96	362	0,336	847	0,313

293	7,82	103	0,261	688	35,70	913	5,97	78	0,342	1022	0,313
794	7,82	643	0,262	836	35,75	922	6,03	115	0,343	347	0,315
643	7,86	368	0,262	341	36,43	293	6,13	48	0,346	513	0,324
433	7,87	874	0,262	847	36,43	879	6,18	1022	0,352	336	0,332
910	7,87	13	0,262	253	36,62	879	6,25	667	0,354	880	0,339
952	7,93	163	0,263	132	36,67	248	6,36	475	0,357	1	0,359
192	7,95	661	0,263	879	36,69	935	6,37	36	0,366	115	0,360
767	7,96	990	0,263	224	37,06	615	6,58	790	0,374	408	0,380
619	7,97	421	0,263	192	37,18	295	6,62	149	0,375	688	0,383
418	7,99	853	0,264	103	38,11	243	6,67	513	0,385	668	0,390
925	8,00	347	0,264	655	38,20	1	6,70	615	0,386	35	0,393
1	8,00	293	0,265	143	38,44	690	6,82	706	0,386	600	0,402
819	8,01	204	0,265	78	38,85	319	6,82	655	0,395	957	0,431
593	8,04	48	0,265	243	39,08	905	6,90	336	0,399	103	0,432
149	8,05	224	0,266	185	39,15	78	7,01	847	0,400	368	0,451
682	8,05	149	0,266	733	39,27	218	7,03	600	0,417	293	0,463
408	8,05	203	0,266	406	39,57	47	7,08	35	0,420	948	0,474
935	8,06	787	0,267	990	39,63	790	7,16	1	0,421	183	0,481
36	8,06	520	0,267	513	39,82	853	7,17	668	0,439	863	0,485
790	8,07	253	0,268	593	40,05	48	7,17	880	0,441	253	0,486
214	8,33	673	0,276	605	45,84	421	8,51	831	0,649	243	0,626
475	8,34	231	0,276	948	45,91	353	8,55	767	0,687	947	0,660
996	8,34	690	0,276	790	46,01	528	8,63	859	0,687	176	0,665
637	8,35	768	0,277	35	46,30	990	8,71	421	0,696	682	0,719
35	8,56	767	0,282	153	50,85	362	9,44	353	0,844	528	0,891
183	8,61	248	0,283	859	52,01	153	9,59	218	0,849	768	0,894
648	8,61	593	0,283	418	54,35	170	9,59	733	0,881	733	0,897
807	8,64	952	0,284	957	54,73	880	9,64	787	0,886	913	0,903
347	8,98	605	0,305	231	64,18	35	11,82	13	1,118	498	1,164
863	9,04	620	0,313	947	70,62	600	12,51	498	1,143	13	1,222

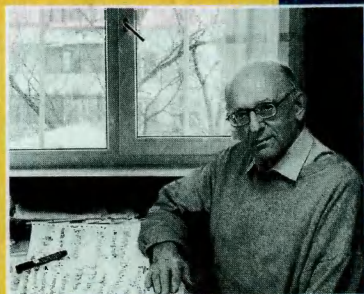
Таблица числителей **Т а б л и ц а Д 1 (к странице 142)**

j	$i=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17	51	85	255	257	771	1 285	3 855	4 369	13 107	21 845	65 535	65 537	196 611	327 685	983 055
3	1	1	7	11	13	61	67	79	465	721	823	4 091	4 125	4 141	28 723	45 311	53 505	250 113	276 231	326 411
4	1	3	7	5	7	43	49	147	439	1 013	727	987	5 889	6 915	16 647	49 925	116 487	83 243	116 529	715 667
5	1	1	5	3	15	51	125	141	177	759	267	1 839	6 929	16 241	16 565	17 139	82 207	50 979	252 717	851 901
6	1	3	1	1	9	59	25	89	321	835	833	4 033	3 913	11 643	18 777	35 225	102 401	45 059	36 865	299 009
7	1	1	3	7	31	47	109	173	181	949	471	2 515	6 211	2 147	3 169	35 873	33 841	99 889	247 315	1 032 727
8	1	3	3	9	9	57	43	43	225	113	1 601	579	1 731	11 977	7 241	63 609	81 003	15 595	144 417	685 617
9	1	3	7	13	3	35	89	9	235	929	1 341	3 863	1 347	4 417	5 087	12 631	103 445	152 645	130 127	775 365
10	1	1	5	11	27	53	69	25	103	615	913	977	6 197	14 651	2 507	27 109	5 205	91 369	302 231	172 023
11	1	3	5	1	15	19	113	115	411	157	1 725	3 463	2 817	9 997	7 451	12 055	44 877	24 895	508 255	574 033
12	1	1	7	3	29	51	47	97	233	39	2 021	2 909	5 459	2 615	13 329	35 887	97 323	83 101	320 901	810 643
13	1	3	7	7	21	61	55	19	59	761	1 905	3 379	8 119	13 207	8 965	9 997	75 591	226 659	187 499	628 265
14	1	1	1	9	23	37	97	97	353	169	375	1 349	5 121	13 313	19 457	1 033	62 487	250 917	234 593	308 321
15	1	3	3	5	19	33	3	197	329	983	893	3 739	7 669	2 671	18 391	31 161	12 111	259 781	36 159	232 401
16	1	1	3	13	11	7	37	101	463	657	1 599	347	2 481	5 201	3 123	32 253	78 043	634 47	508 757	974 837
17	1	1	7	13	25	5	83	255	385	647	415	387	7 101	11 469	11 699	15 865	49 173	147 489	81 991	802 875
18	1	3	5	11	7	11	103	29	111	581	605	2 381	2 677	14 855	721	26 903	100 419	206 167	241 771	987 201
19	1	1	1	3	13	39	27	203	475	505	819	2 821	1 405	12 165	709	41 543	57 545	77 163	357 231	378 135
20	1	3	1	15	17	63	13	65	451	833	975	1 873	7 423	5 837	20 481	12 291	86 017	12 303	299 025	774 207
21	1	1	5	5	1	27	33	195	263	139	915	1 959	725	5 387	19 285	5 165	27 985	69 809	128 325	164 575
22	1	3	3	3	25	17	115	177	19	147	1 715	1 929	2 465	12 483	13 057	28 931	54 019	21 251	62 233	248 081
23	1	1	3	15	29	15	41	105	249	203	1 223	2 389	471	12 945	32 321	29 377	127 427	103 759	472 541	1 008 719
24	1	3	1	7	3	23	79	17	275	81	1 367	3 251	2 887	1 279	4 865	64 771	24 321	42 247	338 691	599 831
25	1	3	7	9	31	29	17	47	369	337	663	1 149	1 715	187	12 285	53 631	110 851	4 357	153 347	671 033

26	1	1	5	13	11	3	29	169	393	829	629	243	5 595	8 133	4 929	10 817	8 261	189 901	255 947	734 787
27	1	3	1	9	5	21	119	109	167	989	525	3 609	5 689	11 819	15 889	48 083	67 537	63 993	336 469	749 285
28	1	1	3	1	23	13	75	149	333	375	469	1 131	441	14 471	12 625	8 881	34 707	85 105	479 495	911 133
29	1	3	3	11	27	31	73	15	473	365	981	1 701	3 169	7 615	8 405	41 135	106 823	107 847	339 031	977 907
30	1	1	7	7	19	25	105	213	469	131	1 667	143	4 485	2 981	12 593	60 913	15 703	26 967	507 907	344 073
31	1	3	5	5	21	9	7	135	101	215	1 587	1 339	6 311	4 081	28 637	60 935	94 129	109 273	475 921	281 389
32	1	1	1	15	5	49	59	253	21	733	1 251	3 497	3 557	7 223	13 425	58 577	69 521	217 151	424 277	789 985
33	1	1	1	1	1	33	65	191	451	451	451	2 499	483	11 843	28 285	12 029	86 021	217 093	348 165	176 165
34	1	3	5	15	17	19	21	155	229	447	481	1 571	3 781	10 799	15 893	959	19 793	213 491	377 941	414 943
35	1	1	7	11	13	29	3	175	247	177	721	983	3 195	9 277	15 405	19 637	87 283	186 143	343 297	1 041 185
36	1	3	7	5	7	11	113	63	297	57	483	4 021	5 213	2 031	4 677	26 607	20 931	54 345	259 163	741 087
37	1	1	5	3	15	19	61	47	403	471	1 209	1 625	5 085	15 371	19 493	56 445	26 369	27 399	521 499	132 383
38	1	3	1	1	9	27	89	7	497	979	1 457	3 217	185	6 603	1 129	36 087	66 817	98 051	451 841	175 361
39	1	1	3	7	31	15	45	23	61	197	415	1 163	7 323	7 563	25 321	52 563	37 745	81 777	235 347	539 895
40	1	3	3	9	9	25	107	39	361	251	1 435	2 977	1 713	11 617	14 979	5 455	68 289	209 987	346 179	521 289
41	1	3	7	13	3	3	25	55	215	517	725	3 391	4 021	4 129	4 099	12 345	102 733	21 287	128 115	20 689
42	1	1	5	11	27	21	5	71	393	137	861	675	5 875	12 061	25 469	47 423	29 505	124 097	444 613	430 923
43	1	3	5	1	15	51	49	87	125	567	41	3 093	5 363	3 471	17 589	50 131	33 137	98 739	361 365	426 737
44	1	1	7	3	29	19	111	103	285	1 021	1 619	1 495	4 977	15 919	6 731	43 771	23 313	151 281	270 519	11 187
45	1	3	7	7	21	29	119	119	501	167	1 579	3 443	5 441	1 097	13 483	58 779	36 561	116 819	420 599	998 391
46	1	1	1	9	23	5	33	135	277	877	1 701	557	1 779	10 369	15 325	33 331	118 321	59 665	498 897	494 137
47	1	3	3	5	19	1	67	153	199	929	869	675	6 777	14 343	18 465	63 615	43 349	30 799	322 567	939 017
48	1	1	3	13	11	39	101	169	301	269	1 151	1 489	287	8 475	6 929	46 013	52 785	75 249	14 035	507 165
49	1	1	7	13	25	37	19	185	19	327	1 897	2 303	6 919	16 139	16 677	34 579	120 981	239 693	73 299	863 545
50	1	3	5	11	7	43	39	201	83	997	1 679	3 925	1 517	305	21 765	45 827	91 157	113 679	204 881	761 911
51	1	1	1	3	13	7	91	217	351	91	1 355	3 705	1 875	7 621	4 381	9 079	94 533	37 261	431 301	176 455

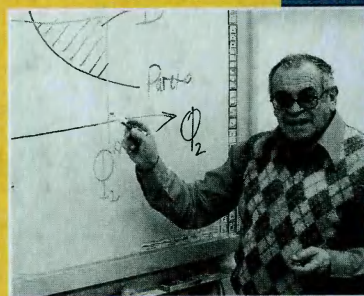
СОБОЛЬ Илья Меерович —

проф., д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института математического моделирования РАН, автор нескольких монографий и более чем 150 научных работ. Основные труды относятся к теории дифференциальных уравнений, теории равномерного распределения, методам Монте-Карло и квази-Монте-Карло, многокритериальной оптимизации и глобальному анализу чувствительности. Индекс цитируемости превосходит 1500. В течение 30 лет профессор МИФИ. Читал курсы лекций в университетах Воронежа, Ульяновска, Кайзерслаутерна (ФРГ) и Граца (Австрия).



СТАТНИКОВ Роман Бенционович —

проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией «Теория и методы оптимального проектирования» Института машиноведения РАН, автор нескольких монографий и более чем 200 научных работ. Является одним из лидеров в областях многокритериальной оптимизации, векторной идентификации и многокритериального проектирования. Его работы получили мировое признание. Читал курсы лекций в МГУ им. Н. Э. Баумана, МИИТе, в Станфордском и Дж. Хопкинса университетах (США) и др. В настоящее время ведет научную и педагогическую работу в Naval Postgraduate School (США).



Мы всю жизнь пытаемся искать в некотором смысле лучшие решения. В математике имеется много методов оптимизации, которые отвечают на вопросы — как и при каких условиях искать эти решения. Однако, когда дело доходит до реальных прикладных задач, все сталкиваются с серьезными проблемами — как определить область поиска и что такое лучшие решения, если имеется множество противоречивых критериев. Мы попытались ответить на эти вечные вопросы более чем тридцатилетним опытом успешного приложения нашего метода в самых разных сферах науки и производства.



ISBN 5-7107-7989-X



9 785710 779897